e-ISSN: 2714-5506
p-ISSN: 2714-609X

SQUARE : Journal of Mathematics and Mathematics Education
Volume 4, No. 2, 2022, pp. 125-132
http://dx.doi.org/10.21580/square.2022.4.2.15517

Struktur Grup pada *Pocket Cube*

Prihadi Kurniawan
UIN Walisongo Semarang
kurniawan.prihadi@walisongo.ac.id

ABSTRAK

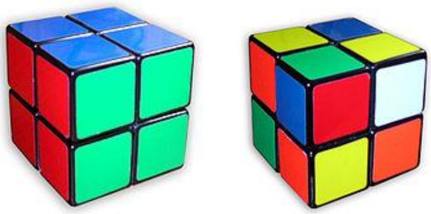
Kajian ini berfokus pada proses terbentuknya grup semi hasil kali langsung yang dibangkitkan dari benda konkret yakni pocket cube. Grup dikonstruksi dengan menentukan grup bebas yang dikontstruksi dari barisan rotasi tereduksi berhingga rotasi standar pada pocket cube Selanjutnya dengan mengaksikan grup ini pada posisi dan orientasi cubino pada pocket cube diperoleh himpunan pasangan-pasangan anggota di *S_8* dan *Z_3^8*. Dengan memperhatikan beberapa pola acakan yang valid pada pocket cube, sifat-sifat dari pasangan anggota ini kemudian dikaji sehingga diperoleh sifat-sifat yang menggambarkan bagaimana setiap pola acakan valid pada pocket cube berkorespondensi dengan setiap elemen di semi hasil kali langsung dari *S_8* dan *Z_3^8*. Selain itu hasil kajian menggambarkan bagaimana pola acakan pocket cube ketika dua barisan rotasi tereduksi yang diaksikan berurutan dengan melihat representasi operasi dari anggota grup semi hasil kali langsungnya.
Kata Kunci: grup, pocket cube, semi hasil kali langsung.

ABSTRACT

The objective of this research is to examine the abstraction of a semi-direct product group that originates from a specific object, which is the pocket cube. The process involves constructing groups by identifying free groups that are produced from reduced rotation sequences with finite standard rotations within the pocket cube. Moreover, by taking the action group to the position and orientation of the cubino on the pocket cube, the set of member pairs in S_8 and Z_3^8 is derived. The investigation then focuses on various valid random patterns on the pocket cube to determine how they correspond to each element in the semi-direct product of S_8 and Z_3^8. Additionally, the study describes the randomness of the pocket cube pattern when two reduced rotation sequences are applied sequentially by analyzing the operational representation of the semi-direct product group members.
Keywords*: group, pocket cube, semi-direct product.*

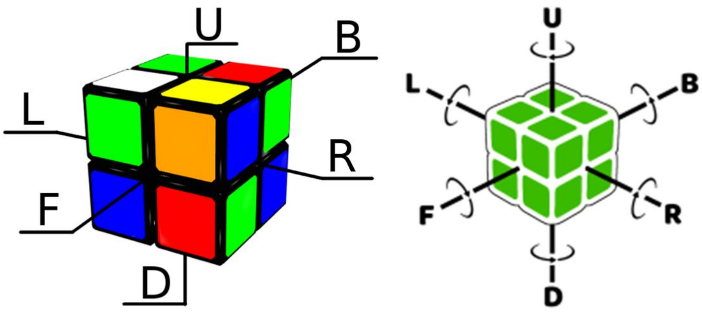
1. PENDAHULUAN

Sudah cukup banyak bahasan tentang keindahan matematika di alam, seperti geometri fraktal 123 dan golden ratio 45 (Mandelbrot, 1982; Losa, 2009; Brotosiswojo, 2006; Heyrovsk, 2009; Henein, dkk, 2011). Harus disadari bahwa meskipun sebagai Ratunya Ilmu Pengetahuan, matematika harus mampu menjawab bagaimana eksistensi "aljabar abstrak" di alam. Sebelum Profesor Erno Rubik menemukan Rubik's Cube pada 1974, *pocket cube*, yang nampak seperti versi mini dari Rubik's Cube, telah lebih dulu diciptakan oleh Larry D. Nichols pada tahun 1970. Larry mematenkannya dengan nama *Pattern forming puzzle and method with pieces rotatable in groups* dan telah mendapatkan patennya pertama kali pada tahun 1972 (Nichols, 1972). Meskipun *pocket cube* cenderung tidak sepopuler *Rubik's cube*, namun *pocket cube* menjadi salah satu objek menarik pada perkembangan teori grup dalam kajian aljabar abstrak.



Gambar 1. Pocket Cube Reguler (kiri) dan
Pocket Cube Teracak (kanan)

Pocket cube tersusun atas 2×2×2 atau 8 kubus kecil yang disebut *cubino* dan 6 sisi berwarna yang disebut *facet*. Seluruh cubino pada pocket cube memiliki 3 *facet* sehingga terdapat total 24 *facet* pada *pocket cube* yang pada kondisi awalnya masing-masing 4 *facet* di tiap 6 sisi pocket cube memiliki warna yang sama. Kondisi awal ini disebut sebagai pocket cube reguler (Gambar 1). Enam warna standar *western* yang biasa digunakan adalah merah, biru, jingga, hijau, kuning, dan putih. Tiap empat cubino pada satu sisi pocket cube dapat diputar secara bebas sehingga akan mengubah posisi facet pada sisi-sisinya. Pada kondisi tertentu, setelah beberapa sisi pocket cube diputar sedemikian rupa, maka akan diperoleh pocket cube yang memiliki warna facet yang berbeda-beda pada tiap sisinya. Kondisi ini disebut dengan pocket cube teracak.



Gambar 2. Notasi rotasi pada pocket cube.

Dengan menggunakan notasi yang sama seperti yang dikembangkan oleh Singmaster (1981) untuk *Rubik's cube*, huruf-huruf F, B, R, L, U, dan D berturut-turut akan digunakan untuk mewakili rotasi 90 derajat searah jarum jam untuk sisi depan, belakang, kanan, kiri, atas, dan bawah pocket cube (Gambar 2). Notasi yang digunakan untuk rotasi 90 derajat berlawanan arah jarum jam berturut-turut untuk sisi yang sama adalah F^{-1}, B^{-1}, R^{-1}, L^{-1}, U^{-1}, dan D^{-1}. Misalkan

$$\Pi = \{F, B, R, L, U, D\}$$

adalah himpunan semua rotasi tunggal standar pada *pocket cube*. Didefinisikan operasi atas dua rotasi di Π untuk sembarang $A, B \in \Pi$, yang dinotasikan dengan AB, adalah barisan rotasi yang berarti merotasikan B terlebih dahulu kemudian dilanjutkan dengan A. Untuk setiap $X \in \Pi$, notasi X^n dengan n bilangan asli adalah barisan rotasi $XX...X$ sebanyak n suku. Dengan notasi ini dapat dinyatakan bahwa $X^3 = X^{-1}$. Dengan menggunakan definisi tersebut tersebut, penerapan sederet rotasi pada *pocket cube* akan dibaca dari belakang. Sebagai contoh, barisan rotasi $FRDLU$ menyatakan berturut-turut rotasi 90 derajat sisi atas, kemudian kiri, bawah, kanan, dan terakhir sisi depan pada suatu pocket cube. Dinotasikan O adalah rotasi kosong, yakni rotasi pada pocket cube tanpa merotasikan sisi manapun. Dan dengan pemahaman ini untuk setiap $X \in \Pi$ berlaku $XX^{-1} = X^{-1}X = O$ dan $X^4 = O$.

Untuk selanjutnya, barisan rotasi yang digunakan adalah barisan rotasi tereduksi, yaitu barisan rotasi yang diperoleh dengan menghapuskan barisan bagian yang sama dengan O dan menuliskan rotasi bagian berbentuk X^{-3}, X^{-2}, dan X^3 berturut-turut sebagai X, X^2, dan X^{-1} untuk setiap rotasi tunggal standar $X \in \Pi$. Sehingga setiap barisan rotasi tereduksi dapat dinyatakan dalam bentuk $X_1^{i_1}X_2^{i_2} \dots X_n^{i_n}$ dengan $X_j \in \Pi, X_j \neq X_{j+1}$ untuk setiap $1 \leq j < n$, dan $i_k \in \{-1, 1, 2\}$ untuk setiap $1 \leq k < n$. Himpunan semua barisan reduksi berhingga pada pocket cube, yang dinotasikan dengan G_Π membentuk grup dengan operasi rangkaian tereduksi "." yang mendefinisikan $X.Y$ sebagai rotasi tereduksi dari XY. Pembuktian teorema ini sejalan dengan pembahasan grup bebas pada Dummit dan Foote (2004) dan Kurniawan (2015).

Pengembangan konstruksi struktur grup pada pocket cube ini diilhami dengan proses yang sama yang dilakukan oleh Singmaster (1981), Joyner (2008), dan Bergvall, dkk (2010). Proses yang dilakukan adalah pada rubik's cube berukuran $3 \times 3 \times 3$, rubik's cube versi standar. Diperoleh bahwa masing-masing pola acarakan pada rubik'c cube berkorespondensi dengan setiap elemen pada grup rubik's cube yang himpunannya dideskripsikan sebagai

$$S = \{(\pi_C, o_C, \pi_E, o_E) |\ \pi_C \in S_8, o_c \in Z_3^8, \pi_E \in S_{12}, o_E \in Z_2^{12},$$
$$sgn(\pi_C) = sgn(\pi_E), \sum_{i=1}^{8} (o_C)_i = 0; \sum_{i=1}^{12} (o_E)_i = 0; \}$$

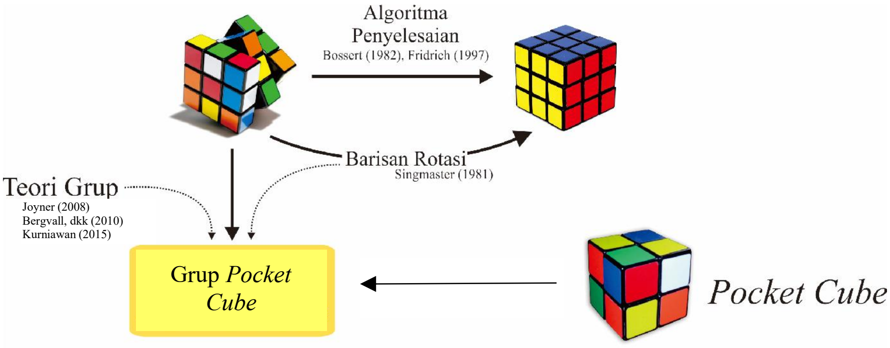
dengan definisi operasi

$$(\pi_C, o_C, \pi_E, o_E) \cdot (\pi_C', o_C', \pi_E', o_E') = (\pi_C\pi_C', o_C + \pi_C . o_C', \pi_E\pi_E', o_E + \pi_E . o_E').$$

Kajian-kajian mendalam untuk versi cube yang lain belum dilakukan. Pada penelitian ini, versi rubik berukuran $2 \times 2 \times 2$ akan digunakan. Proses yang dilakukan analog, yakni dengan mengaksikan grup barisan rotasi kepada posisi dan orientasi cubino pada pocket cube. Melalui aksi grup ini, akan memunculkan subgrup dari grup permutasi yang merepresentasikan posisi valid pocket cube apabila dikenai suatu barisan rotasi tereduksi.

2. METODE

Metode yang dilakukan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Kajian yang dikembangkan merupakan pengembangan beberapa hasil yang telah dijelaskan oleh Singmaster (1981), Joyner (2008), Bergvall, dkk (2010), dan Kurniawan (2015) dengan menggunakan dasar-dasar teori tentang grup oleh Dummit dan Foote (2004). Alur penelitian yang dilakukan merujuk pada Gambar 3.



Gambar 3. Diagram alur penelitian

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dengan menggunakan terminologi yang telah dijelaskan pada latar belakang, telah didefinisikan G_Π berupa himpunan semua barisan rotasi tereduksi berhingga dari himpunan Π (himpunan semua rotasi standar pada pocket cube). Sesuai dengan kajian grup bebas (free group) pada Dummit dan Foote (2004) dapat ditunjukkan bahwa G_Π membentuk grup.

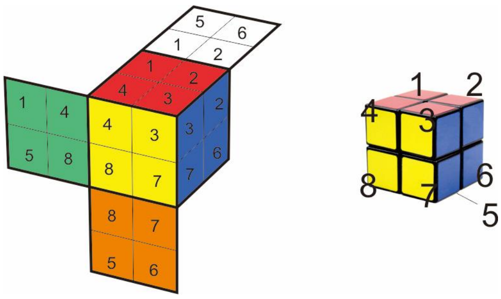
Teorema 1. Himpunan yang memuat semua barisan tereduksi berhingga dari elemen-elemen di $\Pi = \{F, D, R, L, U, B\}$ dan sebuah elemen O sebagai rotasi kosong, dinotasikan dengan G_Π, membentuk grup atas operasi rangkaian tereduksi yang mendefinisikan $X.Y$ sebagai rotasi tereduksi XY (X dioperasikan dengan operasi rangkaian terhadap Y) untuk setiap $X, Y \in G_\Pi$. Grup ini disebut dengan grup barisan rotasi.

3.1. Posisi Valid Pocket Cube

Mula-mula masing-masing *cubino* diberi indeks dengan angka 1 hingga 8 (Gambar 4) maka dapat ditentukan aksi grup G_Π pada himpunan $C = \{c_1, c_2, \dots, c_8\}$ dengan definisi

$$*_C : G_\Pi \times C \to C$$
$$(X, a) \mapsto b$$

dengan posisi *b* adalah posisi cubino yang sebelumnya berada di posisi *a* setelah dilakukan barisan rotasi tereduksi *X*.



Gambar 4. Penomoran Cubino

Pendefinisian aksi grup $*_C$ ini akan membentuk suatu homomorfisma

$$\rho : G_\Pi \to S_8$$
$$X \mapsto \phi_X$$

yang membawa barisan rotasi tereduksi berhingga X ke permutasi ϕ_X yakni permutasi yang memetakan cubino c_i ke cubino $c_{\phi_X(i)}$. Berikut adalah contoh apabila rotasi-rotasi standar pada Π dipetakan menurut ρ.

$$\rho(U) = (1\ 2\ 3\ 4);\ \rho(L) = (1\ 4\ 8\ 5);\ \rho(F) = (3\ 7\ 8\ 4);$$
$$\rho(D) = (5\ 8\ 7\ 6);\ \rho(R) = (3\ 2\ 6\ 7);\ \rho(B) = (1\ 5\ 6\ 2).$$

Teorema 2. Fungsi ρ merupakan pemetaan surjektif.
Sketsa bukti. Diperhatikan bahwa terdapat barisan tereduksi berhingga

$$X = DUD^{-1}UDU^{-1}D^{-1}U^{-1}D^2RD^{-1}U^{-1}D^{-1}UDR^{-1}U^{-1}D^{-1} \in G_\Pi$$

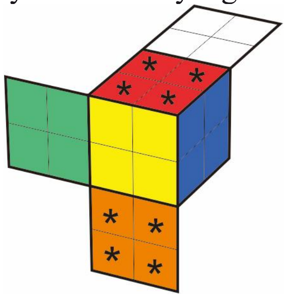
sehingga $\rho(X) = (1\ 2) \in S_8$. Karena posisi cubino teratur simetris, dapat ditentukan rotasi tertentu $Y \in G_\Pi$ sehingga $\rho(Y)$ merupakan transposisi yang menukarkan dua cubino yang bersebelahan (2 dengan 3, 4 dengan 8, dan seterusnya). Diperhatikan bahwa setiap transposisi di S_8 akan selalu dapat dinyatakan sebagai perkalian transposisi-transposisi yang termuat di himpunan

$$tr_c = \{(1\ 2), (2\ 3), (3\ 4), (1\ 4), (2\ 6), (3\ 7), (4\ 8), (1\ 5), (5\ 6), (6\ 7), (7\ 8), (1\ 8)\}$$

yakni himpunan transposisi-transposisi yang menukarkan dua cubino yang posisinya bersebelahan. Karena setiap permutasi selalu dapat dinyatakan sebagai hasil kali transposisi-transposisi yang saling asing dan setiap transposisi dapat dinyatakan sebagai perkalian transposisi-transposisi yang termuat di tr_C artinya setiap pola pertukaran cubino para pocket cube yang berkorespondensi dengan suatu anggota S_8 selalu terdapat suatu berisan tereduksi berhingga Z di G_Π sehingga rotasi tersebut jika dikenakan pada pocket cube standar akan didapat pola pertukaran cubino yang dimaksud.

3.2. Orientasi Valid Pocket Cube

Selain menentukan posisi dari cubino, selanjutnya akan ditentukan orientasi dari cubino. Orientasi dari cubino akan dinyatakan sebagai 8-tupel $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8)$ dengan $\omega_i \in \{0, 1, 2\}$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ dan ω_i menyatakan orientasi cubino c_i . Koordinat ω_i bernilai 0 jika cubino c_i terorientasi dengan benar, bernilai 1 jika mempunyai orientasi yang salah tipe pertama, dan bernilai 2 jika mempunyai orientasi yang salah tipe kedua (Gambar 5).



Gambar 5. Peta orientasi cubino

Misalkan X adalah barisan rotasi berhingga yang mempermutasikan cubino pada pocket cube terleselesaikan yang dinyatakan oleh $\pi \in S_8$ dan yang mengubah orientasi yang dinyatakan oleh 8-tupel $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8)$ dengan $\omega_i \in \mathbb{Z}_3$. Misalkan pula Y adalah barisan rotasi berhingga yang mempermutasikan cubino pada pocket cube terleselesaikan yang dinyatakan oleh $\sigma \in S_8$ dan yang mengubah orientasi yang dinyatakan oleh 8-tupel $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_8)$ dengan $\epsilon_i \in \mathbb{Z}_3$. Diperhatikan bahwa XY merepresentasikan baritasn rotasi yang mengaksikan barisan rotasi Y terlebih dahulu kemudian dilanjutkan oleh barisan rotasi X pada suatu pocket cube terselesaikan. Misalkan orientasi cubino stelah mengaksikan XY dinyatakan dengan $\vec{\omega}'$. Diperhatikan bahwa ada tiga kasus. Nilai $\omega_i' = \omega_i$ apabila $\epsilon_{\pi^{-1}(i)} = 0$, nilai $\omega_i' =$

$\omega_i + 1$ apabila $\epsilon_{\pi^{-1}(i)} = 1$, dan nilai $\omega_i' = \omega_i + 2$ apabila $\epsilon_{\pi^{-1}(i)} = 2$. Dapat disimpulkan bahwa

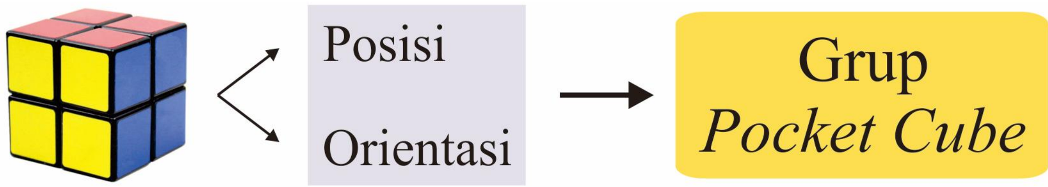
$$\vec{\omega}' = \vec{\omega} + \pi \cdot \vec{\epsilon}$$

dengan operasi penjumlahan di $\mathbb{Z}_3$ dan π beraksi pada $\vec{\epsilon}$ dengan definisi

$$\pi \cdot \vec{\epsilon} = \pi \cdot\!= (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_8) = \left(\epsilon_{\pi(1)}, \epsilon_{\pi(2)}, \dots, \epsilon_{\pi(8)}\right).$$

3.3. Pola Acakan Valid Pocket Cube (Posisi dan Orientasi Cubino)

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, grup pocket cube akan mempertimbangkan dua aspek, yakni posisi cubino dan orientasi cubino (Gambar 6).



Gambar 6. Posisi dan Orientasi Pocket Cube

Dapat diperhatikan bahwa setiap pola acakan pada pocket cube berikut posisinya dapat diwakili oleh elemen-elemen grup semi hasil kali langsung $S_8 \ltimes_\varphi \mathbb{Z}_3^8$ berbentuk pasangan $(\sigma, \vec{u})$ dengan $\sigma \in S_8$ dan $\vec{u} \in \mathbb{Z}_3^8$ dengan $\varphi: S_8 \to Aut(\mathbb{Z}_3^8)$ adalah homomorfisma yang mendefinisikan $\varphi(\sigma) = \varphi_\sigma$ dan berlaku $\varphi_\sigma(\vec{u}) = (u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(8)})$ untuk setiap $\vec{u} \in \mathbb{Z}_3^8$. Diperhatikan bahwa pada grup semi hasil kali langsung $S_8 \ltimes_\varphi \mathbb{Z}_3^8$ berlaku operasi $*_\varphi$ dengan definisi

$$(\pi, \vec{u}) *_\varphi (\sigma, \vec{v}) = (\pi\sigma, \vec{u} + \varphi_\pi(\vec{v}))$$

dengan $\varphi_\pi(\vec{v})$ diperoleh dari $\vec{v}$ dengan mempermutasikan indeks-indeksnya menurut π.

Teorema 3. Untuk setiap orientasi cubino $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_8) \in \mathbb{Z}_3^8$ berlaku $\sum_{i=1}^{8} w_i = 0$.
Bukti. Dengan menggunakan induksi pada banyaknya rotasi yang dikenakan pada pocket cube. Rotasi pada satu sisi pada pocket cube diberikan oleh $(\sigma_G, \vec{w}_G)$ dengan $G \in \Pi$. Posisi dan orientasi akhir dari cubino diberikan oleh

$$(\sigma_G, \vec{w}_G) *_\varphi \left(id, \vec{0}\right) = \left(\sigma_G \circ id, \vec{w}_G + \sigma_G \cdot \vec{0}\right) = \left(\sigma_G, \vec{w}_G + \vec{0}\right) = (\sigma_G, \vec{w}_G).$$

Dapat diperhatikan bahwa

$$\vec{w}_F = (0,0,1,2,0,0,2,1)$$
$$\vec{w}_B = (1,2,0,0,2,1,0,0)$$
$$\vec{w}_U = (0,0,0,0,0,0,0,0)$$
$$\vec{w}_D = (0,0,0,0,0,0,0,0)$$
$$\vec{w}_R = (0,1,2,0,0,2,1,0)$$
$$\vec{w}_L = (2,0,0,1,1,0,0,2)$$

Diperoleh bahwa $\sum_{i=1}^{8} (\vec{w}_G)_i = 0$ untuk setiap $G \in \Pi$. Kemudian andaikan benar bahwa untuk sembarang rangkaian sebanyak n rotasi berlaku $\sum_{i=1}^{8} (\vec{w}_n)_i = 0$ dengan $\vec{w}_n$ menyatakan orientasi cubino setelah dilakukan n rotasi tersebut. Akan ditunjukkan bahwa untuk sembarang rangkaian sebanyak $n+1$ rotasi berlaku $\sum_{i=1}^{8} (\vec{w}_{n+1})_i = 0$. Diperhatikan bahwa

$$(\sigma_G, \vec{w}_G) *_\varphi (\sigma_n, \vec{w}_n) = (\sigma_G \circ \sigma_n, \vec{w}_G + \sigma_G \cdot \vec{w}_n)$$

untuk sembarang $G \in \Pi = \{F, B, U, D, R, L\}$. Diperoleh bahwa $\vec{w}_G + \sigma_G \cdot \vec{w}_n$ menyatakan orientasi dari cubino setelah $n+1$ rotasi. Permutasi indeks-indeks dari $\vec{w}_n$ tidak akan mempengaruhi nilai $\sum_{i=1}^{8} (\vec{w}_n)_i$ sehingga diperoleh

$$\sum_{i=1}^{8} (\vec{w}_G + \sigma_G \cdot \vec{w}_n)_i = \sum_{i=1}^{8} (\vec{w}_G)_i + \sum_{i=1}^{8} (\vec{w}_n)_i = 0.$$

Jadi, untuk setiap orientasi cubino $\vec{w}$ diperoleh $\sum_{i=1}^{8} w_i = 0$.

Dengan mendefinisikan notasi $sum(\vec{w}) = \sum_{i=1}^{8} \vec{w}_i$, berdasarkan Teorema 3, akan ditunjukkan himpunan

$$G_{PC} = \{(\pi, \vec{w}) | \pi \in S_8, \vec{w} \in \mathbb{Z}_3^8, sum(\vec{w}) = 0\}$$

merupakan subgrup dari grup semi hasil kali langsung $S_8 \ltimes_\varphi \mathbb{Z}_3^8$.

Proposisi 1. (Dummit dan Foote, 2003) Suatu subset H dari grup G merupakan subgrup jika dan hanya jika $H \neq \emptyset$ dan untuk setiap $x, y \in H$ berlaku $xy^{-1} \in H$. Apabila H berhingga, syarat cukupnya hanya $H \neq \emptyset$ dan tertutup atas operasi binernya, yakni untuk setiap $x, y \in H$ berlaku $xy \in H$

Teorema 4. Grup pocket cube dijelaskan oleh himpunan

$$G_{PC} = \{(\pi, \vec{w}) | \pi \in S_8, \vec{w} \in \mathbb{Z}_3^8, sum(\vec{w}) = 0\}$$

dengan operasi biner $\circ$ yang didefinisikan oleh

$$(\pi, \vec{u}) \circ (\sigma, \vec{v}) = (\pi\sigma, \vec{u} + \pi \cdot \vec{v})$$

dengan $\pi \cdot \vec{v} = \varphi_\pi(\vec{v}) = (v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(8)})$.

Bukti. Berdasarkan fakta bahwa $S_8 \ltimes_\varphi \mathbb{Z}_3^8$ adalah grup berhingga, berdasarkan Teorema 3 dan Proposisi 1 telah ditunjukkan bahwa G_{PC} tak kosong dan untuk setiap dua anggota $s_1, s_2 \in G_{PC}$ berlaku $s_1 \circ s_2 \in G_{PC}$. Jadi G_{PC} subgrup $S_8 \ltimes_\varphi \mathbb{Z}_3^8$.

Teorema 5. Kardinalitas G_{PC} adalah $8! \times 2^7$.

Bukti. Diperhatikan bahwa setiap permutasi di S_8 adalah permutasi yang valid untuk pola acakan tertentu pada pocket cube. Artinya untuk menempatkan posisi cubino terdapat 8! cara. Sedangkan untuk setiap pola posisi cubino $\vec{w} \in \mathbb{Z}_3^8$ harus memenuhi $sum(\vec{w}) = 0$. Diperhatikan bahwa syarat ini memaksa nilai w_8 hanya salah satu dari $\{0,1,2\}$ bergantung pada nilai $\sum_{i=1}^{7} w_i$. Artinya hanya terdapat 2^7 cara menentukan orientasi cubino. Dengan menggabungkan keduanya diperoleh bahwa kardinalitas G_{PC} adalah $8! \times 2^7$.

4. SIMPULAN DAN SARAN

Setiap pola acakan pocket cube dapat dikorespondensikan dengan elemen-elemen pada grup semi hasil kali langsung $G_{PC} = \{(\pi, \vec{w}) | \pi \in S_8, \vec{w} \in \mathbb{Z}_3^8, sum(\vec{w}) = 0\}$ serta terdapat sejumlah $8! \times 2^7$ susunan valid dari pocket cube yang mungkin. Diperoleh pula, apabila barisan rotasi tereduksi berhingga untuk setiap pola acakan selalu dapat ditentukan, yakni untuk setiap $(\pi, \vec{u}), (\sigma, \vec{v}) \in G_{PC}$ selalu terdapat $X_1, X_2 \in G_\Pi$ sedemikian sehingga $\rho(X_1) = (\pi, \vec{u})$ dan

$\rho(X_2) = (\sigma, \vec{v})$ dan berlaku $\rho(X_2X_1) = (\pi, \vec{u}) \circ (\sigma, \vec{v})$ dengan definisi operasi $(\pi, \vec{u}) \circ (\sigma, \vec{v}) = (\pi\sigma, \vec{u} + \pi \cdot \vec{v})$. Pola acakan yang diperoleh dengan merotasikan barisan X_1 dilanjutkan dengan X_2 dapat ditentukan dengan mengoperasikan s_1 dan s_2 pada G_{PC}.

Meskipun hasil ini sudah dapat menentukan konstruksi grup yang dikontruksi dari pocket cube, namun konstruksi ini belum mempertimbangkan bentuk simetri dari kemungkinan acakan dari pocket cube . Jika nantinya ditetapkan sebuah cubino tetap, maka banyaknya cara pola acakan pocket cube ini harus dibagi dengan 24 (Ronan, 2006). Nantinya akan diperoleh struktur yang berbeda karena order dari grupnya pun akan berbeda pula.

5. DAFTAR PUSTAKA

Bergvall, O., Hynning, E., Hedberg, M., Mickelin, J., dan Masawe, P. (2010) On Rubik's Cube. *Bachelors Thesis*. Kungliga Tekniska Hogskolan: Stockholm.

Brotosiswojo, B. S. (2006). Pemodelan matematika gejala alam. Bandung: Unpar Press.

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract algebra (Vol. 3)*. Hoboken: Wiley.

Henein, M. Y., Zhao, Y., Nicoll, R., Sun, L., Khir, A. W., Franklin, K., & Golden Ratio Collaborators. (2011). The human heart: application of the golden ratio and angle. International Journal of Cardiology, 150, 3, pp. 239-242.

Heyrovsk, R. (2009). The Golden ratio in the creations of Nature arises in the architecture of atoms and ions. In Innovations in Chemical Biology (pp. 133-139). Springer, Dordrecht.

Joyner, D. (2008). *Adventures in Group Theory: Rubiks Cube, Merlins Machine, and Other Mathematical Toys*. United States of America: The Johns Hopkins University Press.

Kurniawan, P. (2015). *Konstruksi Grup pada Rubik's Cube*. Tesis UGM: Tidak Diterbitkan.

Losa, G. A. (2009, January). The fractal geometry of life. In Biology Forum/Rivista di Biologia (Vol. 102, No. 1).

Mandelbrot, B. B., & Mandelbrot, B. B. (1982). The fractal geometry of nature (Vol. 1). New York: WH freeman.

Nichols, L. D. (1972). Pattern forming puzzle and method with pieces rotatable in groups (U.S. Patent No. 3,655,201). U.S. Patent and Trademark Office. https://image-ppubs.uspto.gov/dirsearch-public/print/downloadPdf/3655201

Ronan, M. (2006). *Symmetry and the monster: one of the greatest quests of mathematics*. OUP Oxford.

Singmaster, D. (1981). *Notes on Rubik's Magic Cube*. New Jersey: Enslow Publishers.