e-ISSN: 2714-5506
p-ISSN: 2714-609X

SQUARE : Journal of Mathematics and Mathematics Education
Volume 5, No. 2, 2023, pp. 107-112
http://dx.doi.org/10.21580/square.2023.5.2.17610

Ideal, Homomorfisma dan Gelanggang Faktor pada Gelanggang Artin

Didit Satriawan*, Muhammad Naoval Husni
Universitas Mataram
*diditsatriawan2000@gmail.com

ABSTRAK

Pada penelitian ini akan ditunjukkan beberapa karakteristik dari gelanggang Artin seperti ideal prima, ideal maksimal, homomorfisma dan gelanggang faktor pada gelanggang artin. Hasil utama yang didapatkan dalam penelitian ini adalah jika R gelanggang Artin maka setiap ideal prima dari R adalah maksimal, kemudian jika R merupakan gelanggang Artin maka S juga merupakan gelanggang Artin, dan yang terakhir jika I dan R/I merupakan gelanggang Artin maka R merupakan gelanggang Artin.
Kata Kunci: gelanggang Artin, ideal prima, ideal maksimal, homomorfisma, gelanggang faktor.

ABSTRACT

In this study, we will show some characteristics of the Artin ring, such as the prime ideal, maximum ideal, homomorphism, and factor ring in the Artin ring. The main results obtained in this study are if R is an Artin ring then every prime ideal of R is maximal, then if R is an Artinian ring S is also an Artin ring, and last, if I and R/I are Artin ring then R is an Artinian ring.
***Keywords**: Artinian ring, prime ideal, maximum ideal, homomorphism, factor ring.*

1. PENDAHULUAN

Dalam teori gelanggang, terdapat dual gelanggang yang cukup menarik dikarenakan keduanya digunakan untuk menggambarkan konsep simetri fisik dalam ilmu fisika, yakni gelanggang Artin dan gelanggang Noether. Dengan kedua gelanggang ini, analisis simetri fisik bisa dilakukan dengan mudah (Wardhana et al., 2024).

Gelanggang Artin adalah konsep dalam matematika yang dikemukakan oleh matematikawan Jerman Emil Artin pada tahun 1927. Gelanggang Artin adalah suatu ruang yang digunakan untuk menganalisis simetri dalam konstruksi aljabar (Juliana et al., 2020). Ia merupakan generalisasi dari konsep gelanggang polynomial yang digunakan dalam teori Galois (Alfian et al., 2022). Gelanggang Artin digunakan dalam teori Galois algebraic, di mana ia digunakan untuk menganalisis simetri dari polinomial yang memiliki akar-akar yang tidak rasional . Gelanggang Artin juga digunakan dalam teori represenatasi grup, di mana ia digunakan untuk menganalisis simetri dari suatu grup yang memiliki aksi pada suatu ruang vektor (Wardhana, 2022).

Gelanggang Artin memiliki beberapa karakteristik yang terbentuk dari ideal-idealnya, seperti ideal prima dan ideal maksimal (Wardhana & Maulana, 2021). Hal yang menarik untuk dilakukan penelitian tentang hubungan dari ideal prima dan ideal maksimal. Setiap ideal prima pasti merupakan ideal maksimal pada gelanggang Artin (Hijriati et al., 2018). Ada juga karakteristik dari gelanggang Artin seperti dalam homomorfisma gelanggang Artin yang bersifat epimorfisma juga menghasilkan pemetaan gelanggang Artin (Maulana et al., 2018). pada paper ini akan dibahas beberapa sifat-sifat dari gelanggang Artin dengan menggunkaan beberapa definisi dan teorema sehingga ditemukan sifat-sifat dari gelanggang Artin. (Hijriati et al., 2018)

2. METODE

Pada penelitian ini penulis menggunakan metode studi literatur dan studi pustaka dengan mencari refrensi yang berkaitan dengan gelanggang Artin, ideal prima, ideal maksimal, homomorfisma dan gelanggang faktor serta istilah-istilah lain yang berkaitan dengan penelitian ini. Kemudian literatur dan pustaka yang dimaksud diantaranya seperti jurnal, buku dan sumber lainya. Selanjutnya penulis menggunakan definisi, teorema dan hal penting lainnya untuk menganalisis pola yang dikontruksi menjadi sebuah konjektur yang jika terbukti akan menjadi sebuah teorema.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Apabila semua ideal dari suatu gelanggang dikumpulkan, dengan relasi subhimpunan, kumpulan ini membentuk suatu himpunan terurut parsial. Akibatnya senantiasa bisa dibentuk suatu barisan ideal, baik berupa barisan ideal turun maupun barisan ideal naik. Apabila barisan ideal dari suatu gelanggang membentuk suatu rantai turun dan stasioner, gelanggang ini dinamakan gelanggang Artin (Fitriani et al., 2021).

Definisi 1.1 Suatu gelanggang dikatakan memenuhi syarat rantai turun untuk ideal jika untuk sebarang rantai turun ideal-ideal di R, terdapat bilangan bulat positif k sedemikian sehingga rantai tersebut stasioner, yaitu

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_k = I_{k+1} = \cdots$$

Gelanggang yang memenuhi syarat rantai turun dinamakan gelanggang Artin.

Sebagai contoh, bilangan prima p bersama himpunan $\mathbb{Z}(p^{\infty}) = \{\frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq a \leq p^n, n \in \mathbb{N}\}$ didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{Z}(p^{\infty})$, yaitu $x + y \stackrel{\text{def}}{=} (a + b)$ mod 1 dan $a\,.\,b \stackrel{\text{def}}{=} 0$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}(p^{\infty})$. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}(p^{\infty}), +, .)$ merupakan gelanggang komutatif yang tidak mempunyai elemen satuan. Dengan memperhatikan operasi perkalian yang didefinisikan pada himpunan $\mathbb{Z}(p^{\infty})$, setiap subgrup dari $(\mathbb{Z}(p^{\infty}), +)$ merupakan ideal. Diambil sebarang ideal non-trivial di $\mathbb{Z}(p^{\infty})$. Misalkan k adalah bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi $\frac{q}{p^k} \notin I$ untuk suatu bilangan bulat q dengan $0 \leq q < p^k$. Jika $p|q$ maka $\frac{a}{p^{k-1}} \notin I$ untuk suatu bilangan bulat , $0 \leq a < p^{k-1}$, yang merupakan kontradiksi dengan pemilihan k. Oleh karena itu, gcd $(p, q) = 1$. Selanjutnya, $J = \{0, \frac{1}{p^{k-1}}, \frac{2}{p^{k-1}}, \ldots, \frac{p^{k-1}-1}{p^{k-1}}\}$ merupakan himpunan bagian di I. Akan ditunjukkan bahwa $I \subseteq J$. Perhatikan bilangan rasional $\frac{r}{p^n}$ dengan $\gcd(p, r) = 1$ dan $n > k$. Misalkan $\frac{r}{p^n} \in I$. Karena $\gcd(p, r) = 1$, terdapat bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga $rx + py = 1$. Kemudian $\frac{xr}{p^k} = \frac{(xp^{n-k})\,r}{p^n}$ dan $\frac{py}{p^k} = \frac{y}{p^{k-1}}$ Keduanya berada di dalam I. Akibatnya , $\frac{1}{p^k} = \frac{xr+yp}{p^k} \in I$ yang merupakan kontradiksi dengan pemilihan k. Jadi ,himpunan $I = J$ yang selanjutnya dilambangkan dengan I_k. Jelas bahwa untuk sebarang bilangan bulat positif k , himpunan I_k merupakan ideal di $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ dan terbentuk rantai naik berikut $\{0\} \subset I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots \subset I_k \subset \cdots$ yang tidak stasioner. Namun, karena setiap ideal utama merupakan ideal dengan elemen berhingga, setiap rantai turun yang terjadi pastilah stasioner. Jadi, $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ merupakan gelanggang Artin.

Definisi 1.2 Suatu ideal $I \neq R$ pada sebuah gelanggang komutatif R disebut ideal prima jika $ab \in I$ berimplikasi $a \in I$ atau $b \in I$ untuk $a, b \in R$.

Teorema 1.1 Diberikan gelanggang komutatif R dengan elemen satuan 1_R dan ideal sejati P di R. Ideal P merupakan ideal prima di R jika dan hanya jika R/P merupakan daerah integral.
Bukti: Diketahui P ideal prima di R. Karena R adalah gelanggang komutatif dengan elemen satuan , berakibat R/P juga merupakan gelanggang komutatif dengan elemen satuan. Tinggal ditunjukkan R/P tidak memuat pembagi nol. Karena $P \neq R$, berakibat $R/P \neq \{0_R + P\}$. Selanjutnya diperoleh bahwa elemen satuan $1 + P$ di R/P berbeda dengan elemen nol $0_R + P$ di R/P. Diambil sebarang $a + P, b + P \in R/P$ sedemikian sehingga $(a + P)(b + P) = 0_R + P$. Karena $(a + P)(b + P) = 0_R + P$, diperoleh $ab + P = 0_R + P$ yang ekuvalen dengan $ab \in P$. Mengingat P adalah ideal prima, berakibat $a \in P$ atau $b \in P$, hal tersebut ekuvalen dengan mengatakan $a + P = 0_R + P$ atau $b + P = 0_R + P$ atau $b + P = 0_R + P$. Oleh karena itu, R/P tidak memuat pembagi nol. Jadi terbukti bahwa R/P merupakan daerah integral.
Sebaliknya, diketahui R/P adalah daerah integral. Diambil sebarang $a, b \in R$ sedemikian sehingga $ab \in P$. Karena $ab \in P$ diperoleh $0_R + P = ab + P = (a + P)(b + P)$. Karena R/P

merupakan daerah integral, $a + P = 0_R + P$ atau $b + P = 0_R + P$ yang ekuivalen dengan $a \in P$ atau $b \in P$. Jadi , P merupakan ideal prima ■.

Teorema 1.2. Diberikan sebarang gelanggang R. Jika R tidak memuat pembagi nol maka hukum kanselasi berlaku di gelanggang R, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$, $a \neq 0_R$, $ab = ac$ berakibat $b = c$ (hukum kanselasi kiri) dan $ba = ca$ berakibat $b = c$ (hukum kanselasi kanan). Jika hukum kanselasi kiri atau kanan berlaku di R maka R tidak memuat pembagi nol.

Bukti: Diketahui R tidak memuat pembagi nol. Diambil sebarang $, b, c \in R$, $a \neq 0_R$, sedemikian sehingga $ab = ac$. Karena $ab = ac$, diperoleh $ab - ac = 0_R$ dan berdasarkan sifat distributive diperoleh $a(b - c) = 0_R$. Mengingat R tidak memuat pembagi nol dan $a \neq 0_R$, berakibat $b - c = 0_R$ sehingga diperoleh $b = c$. Jadi hukum kanselasi kiri berlaku. Untuk membuktikan keberlakuan kanselasi kanan dapat menggunakan cara yang sama.

Misal diketahui hukum kanselasi kiri atau kanan berlaku di R. Akan dibuktikan bahwa R tidak memuat pembagi nol. Misalkan hukum kanselasi kiri berlaku. Diambil sebarang $x, y \in R$, $x \neq 0_R$. Misalkan $xy = 0_R$. Karena $x0_R = 0_R$, diperoleh $xy = 0_R = x0_R$. Karena hukum kanselasi kiri berlaku, berakibat $y = 0_R$. Misalkan $yx = 0_R$ dan diandaikan $y \neq 0_R$. Karena $y0_R = 0_R$, diperoleh $yx = y0_R$. Karena hukum kanselasi kiri berlaku, berakibat $x \neq 0_R$. Terjadi kontradiksi dengan yang diketahui bahwa $x \neq 0_R$. Jadi pengandaian salah, yang benar $y = 0$. Dengan demikian terbukti x bukan pembagi nol di R. Karena pengambilan x sebarang di $R \backslash \{0_R\}$, terbukti bahwa R tidak memuat pembagi nol. Bukti analog jika hanya diketahui berlaku hukum kanselasi kanan ■.

Definisi 1.3 Jika $(R, +, \cdot)$ adalah gelanggang dan I merupakan ideal dalam R maka I disebut ideal maksimal dalam R jika dan hanya jika $I \neq R$ dan ideal sejati R yang memuat I hanyalah I sendiri di R.

Teorema 1.3 Diberikan gelanggang komutatif R dengan elemen satuan 1_R dan ideal M di R. Ideal M merupakan ideal maksimal jika dan hanya jika R/M merupakan lapangan.

Bukti: Diketahui M adalah ideal maksimal. Karena R adalah gelanggang komutatif dengan elemen satuan, berakibat R/M juga merupakan gelanggang komutatif dengan elemen satuan. Diambil sebarang $a + M \in R/M$ dengan $a + M \neq 0_R + M$, yang berarti $a \notin M$. Dibentuk ideal $\langle M \cup \{a\} \rangle$, yaitu ideal yang dibangun oleh $M \cup \{a\}$.karena $a \notin M$, diperoleh $M \subset \langle M \cup \{a\} \rangle$. Mengingat M adalah ideal maksimal di R, berakibat $\langle M \cup \{a\} \rangle = R$. Oleh karena itu, terdapat $m \in M$ dan $r \in R$ sedemikian sehingga $1_R = m + ra$. Akibatnya, diperoleh $1_R + M = (m + M) \pm (ra + M)$. Karena $m + M = 0_R + M$, diperoleh $(r + M)(a + M) = ra + M = 1_R + M$ sehingga $a + M$ mempunyai invers di R/M. Jadi , setiap elemen tak nol di R/M mempunyai invers di R/M. Terbukti bahwa R/M merupakan lapangan.

Sebaliknya diketahui R/M adalah lapangan. Hal ini berarti $M \neq R$, sebab jika $M = R$ maka $R/M = \{0_R + M\}$ dan kontradiksi dengan fakta yang mengatakan bahwa R/M adalah lapangan. Diambil sebarang ideal I di R sedemikian sehingga $M \subset I \subseteq R$. Karena $M \subset I$, terdapat $a \in I$ sedemikian sehingga $a \notin M$. Selanjutnya karena $a \notin M$, diperoleh $a + M \neq 0_R + M$. Mengingat R/M adalah lapangan, terdapat $r + M \in R/M$ sedemikian sehingga $ar + M = (a + M)(r + M) = 1_R + M$. Akibatnya, diperoleh $1_R - ar \in M$. Oleh karena itu, terdapat $m \in M$ sedemikian sehingga $1_R = m + ar$. Perhatikan bahwa $1_R = m + ar \in M + I \subseteq I$. Hal ini berakibat $I = R$. Jadi, M merupakan ideal maksimal ■.

Teorema 1.4. Misalkan R gelanggang komutatif dengan elemen satuan, jika R gelanggang Artin maka setiap ideal prima dari R adalah maksimal.

Bukti: Misalkan P adalah ideal prima pada gelanggang R. Berdasarkan Teorema 1.1 gelanggang faktor R/P adalah daerah integral, diambil sebarang $a \in R/P$ dengan $a \neq 0$. Didapatkan $a \subset R$ sehingga $\langle a \rangle \supseteq \langle a^2 \rangle \supseteq \langle a^3 \rangle \supseteq \cdots$ terdapat indeks n dengan $a^n \in \langle a^{n+1} \rangle$. Misalkan $a^n = a^{n+1}\, b$ untuk suatu $b \in R/P$. Berdasarkan Teorema 1.2, hukum kanselasi berlaku pada R/P. Berarti $1 = ab$ sehingga a mempunyai invers, oleh karena itu setiap elemen tak nol di R/P mempunyai invers maka R/P adalah lapangan. Berdasarkan Teorema 1.3, P adalah ideal maksimal ■.

Definisi 1.4. Misalkan gelanggang $(R_1, +_1, \cdot_1)$ dan $(R_2, +_2, \cdot_2)$ dengan suatu pemetaaan $f: R_1 \to R_2$. Pemetaan f disebut homomorfisma gelanggang jika $f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y)$ dan $f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y)$ untuk setiap $x, y \in R_1$.

Ada beberapa jenis homomorfisma yang terkait dengan sifat pemetaanya, salah satunya adalah pemetaan epimorfisma. Suatu homomorfisma f dari gelanggang R_1 ke gelanggang R_2 disebut epimorfisma jika f merupakan pemetaan surjektif. Selanjutnya dengan menggunakan definisi diatas dan sifat sifat dari gelanggang Artin akan dibuat sebuah Proposisi yang menyatakan sifat epimorfisma pada gelanggang Artin.

Teorema 1.5. Misalkan R dan S merupakan gelanggang dengan epimorfisma $f : R \to S$. Jika R merupakan gelanggang Artin maka S juga merupakan gelanggang Artin.

Bukti: Diketahui $f: R \to S$ adalah homomorfisma gelanggang yang surjektif dan R adalah gelanggang Artin. akan dibuktikan bahwa S juga merupakan gelanggang Artin. Ambil sebarang rantai turun di S, misalkan $J_1 \supseteq J_2 \supseteq \cdots$. Perhatikan jika $J_i \supseteq J_{i+1}$ di S maka $f^{-1}(J_i) \supseteq f^{-1}(J_{i+1})$ di R. Akibatnya, terbentuk rantai turun berikut di $R : f^{-1}(J_i) \supseteq f^{-1}(J_{i+1}) \supseteq \cdots$. Karena R merupakan gelanggang Artin, terdapat bilangan bulat positif t sedemikian sehingga $f^{-1}(J_1) \supseteq f^{-1}(J_2) \supseteq \cdots \supseteq f^{-1}(J_t) = f^{-1}(J_{t+1}) = \cdots$. Tinggal ditunjukkan bahwa $J_t \subseteq J_{t+1}$. Diambil $y \in J_t$, karena f epimorfisma, terdapat $x \in R$ sedemikian sehingga $f(x) = y$. Dengan kata lain, $x \in f^{-1}(J_{t+1})$. Oleh karena itu, diperoleh juga $f(x) = y \in J_{t+1}$. Terbukti bahwa $J_t = J_{t+1}$. Jadi, rantai turun di S pun stasioner ■.

Teorema 1.6. Misalkan I ideal dalam gelanggang R. Jika I dan R/I merupakan gelanggang Artin maka R merupakan gelanggang Artin.

Bukti: Perhatikan bahwa secara alami terdapat epimorfisma $\pi : R \to R/I$. Diambil sebarang rantai turun di R, misalnya $J_1 \supseteq J_2 \supseteq \cdots$. Akibatnya, terbentuk rantai turun $(J_1) \supseteq \pi(J_2) \supseteq \cdots \supseteq \pi(J_t) = \pi(J_{t+1}) = \cdots$. Selanjutnya rantai sebarang tadi diiriskan dengan I dan terbentuk $I \cap J_1 \supseteq I \cap J_2 \supseteq \cdots$, yaitu rantai turun di dalam ideal I. Karena I merupakan gelanggang Artin, terdapat bilangan bulat positif k sedemikian sehingga $I \cap J_1 \supseteq I \cap J_2 \supseteq \cdots \supseteq I \cap J_k = I \cap J_{k+1} = \cdots$. Misalkan $n = \max\{t, k\}$, akibatnya, $\pi(J_n) = \pi(J_{n+i})$ dan $I \cap J_n = I \cap J_{n+i}$ untuk $i \geq 1$. Diambil sebarang $x \in J_n$, berarti terdapat $y \in J_{n+i}$ sedemikian sehingga $\pi(x) = \pi(y)$ yang ekuivalen dengan $x + I = y + I$. Dengan kata lain, $x - y \in I$ dan $x - y \in J_n$. Akibatnya, $x - y \in J_n$ dan $x \in J_n$. Jadi, $J_{n+i} = J_n$ untuk semua $i \geq 1$ sehingga terbukti R merupakan gelanggang Artin ■.

4. SIMPULAN

Penelitian ini menemukan bahwa setiap ideal prima dalam gelanggang Artin adalah maksimal, dan bahwa homomorfisma epimorfisma dari gelanggang Artin ke gelanggang lain juga menghasilkan gelanggang Artin. Artikel ini juga menunjukkan bahwa jika suatu gelanggang dan gelanggang faktornya adalah gelanggang Artin, maka gelanggang asalnya juga merupakan gelanggang Artin.

Dengan demikian, artikel ini memberikan kontribusi yang signifikan dalam memahami sifat-sifat gelanggang Artin dan memperluas aplikasi teori gelanggang dalam analisis simetri fisik dan teori Galois.

5. DAFTAR PUSTAKA

Alfian, M. R., Wardhana, I. G. A. W., Maulana, F., Switrayni, N. W., Aini, Q., & Putri, D. N. (2022). Prime submodul of an integer over itself. EIGEN MATHEMATICS JOURNAL, 27–30. https://doi.org/10.29303/emj.v5i1.132

Fitriani, Wijayanti, I. E., Surodjo, B., Wahyuni, S., & Faisol, A. (2021). Category of submodules of a uniserial module. Mathematics and Statistics, 9(5), 744–748. https://doi.org/10.13189/ms.2021.090514

Hijriati, N., Wahyuni, S., & Wijayanti, I. E. (2018). Injectivity and Projectivity Properties of the Category of Representation Modules of Rings. Journal of Physics: Conference Series, 1097(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1097/1/012078

Juliana, R., Wardhana, I. G. W. W., & Irwansyah, I. (2020). Some Characteristics of Prime Submodules of Gaussian Integer Modulo over Integer. Proceeding International Conference on Science (ICST), 209–213.

Maulana, F., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2018). Bilangan Prima dan Bilangan tak Tereduksi pada Bilangan bulat Gauss. Prosiding Seminar Nasional APPPI II, 383–387.

Wardhana, I. G. A. W. (2022). The Decomposition of a Finitely Generated Module over Some Special Ring. JTAM (Jurnal Teori Dan Aplikasi Matematika), 6(2), 261–267. https://doi.org/10.31764/jtam.v6i2.6769

Wardhana, I. G. A. W., Astuti, P., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2024). The Characterization of Almost Prime Submodule on the Finitely Generated Module over Principal Ideal Domain. Journal of the Indonesian Mathematical Society, 30(01), 63–76.

Wardhana, I. G. A. W., & Maulana, F. (2021). Sebuah Karakteristik dari Modul Uniserial dan Gelanggang Uniserial. 7, 9–17.