e-ISSN: 2714-5506
p-ISSN: 2714-609X

SQUARE : Journal of Mathematics and Mathematics Education
Volume 7, No. 1, 2025, pp. 27-37
http://dx.doi.org/10.21580/square.2025.7.1.22169

Dimensi Metrik pada Graf Hasil Operasi Join pada Graf Lengkap dan Graf Tangga

Deddy Rahmadi*, Awal Febriantono, Nurul Mufidah, Tsalis Wifqi Hidayati, Maulidatu Jauharoti Alisyah
Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta, Indonesia
* deddy.rahmadi@uin-suka.ac.id

ABSTRAK

Dimensi metrik suatu graf didefinisikan sebagai kardinalitas minimum dari suatu himpunan pembeda (resolving set) pada graf tersebut. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan dimensi metrik graf hasil operasi *join* antara graf lengkap dan graf tangga. Kajian diawali dengan menentukan dimensi metrik masing-masing graf penyusunnya, yakni graf lengkap K_n dan graf tangga L_m. Selanjutnya dianalisis dimensi metrik graf hasil operaso join $K_n + L_m$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dimensi metrik graf $\mathrm{K_n}$ adalah $\mathrm{n}-1$, dimensi metrik graf $\mathrm{L_n}$ adalah 2, dan dimensi metrik hasil operasi join graf lengkap dan graf tangga $\mathrm{K_n} + L_m$ adalah $n+1$.
Kata kunci: dimensi metrik, operasi join, graf lengkap, graf tangga.

ABSTRACT

The metric dimension of a graph is defined as the minimum cardinality of a resolving set of the graph. This study aims to determine the metric dimension of graphs obtained from the join operation between a complete graph and a ladder graph. The analysis begins by determining the metric dimensions of the constituent graphs, namely the complete graph K_n and the ladder graph L_m. Furthermore, the metric dimension of the graph resulting from the join operation $K_n + L_m$ is investigated. The results show that the metric dimension of the complete graph K_n is $n-1$, the metric dimension of the ladder graph L_m is 2, and the metric dimension of the graph $K_n + L_m$ is $n+1$.
Keywords*: metric dimension, join operation, complete graph, ladder graph.*

1. PENDAHULUAN

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $\big(V(G), E(G)\big)$, dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dari elemen simpul, dan $E(G)$ adalah himpunan dari elemen sisi yang menghubungkan dua simpul di $V(G)$ dimana $E(G)$ boleh berupa himpunan kosong (Gould, 2013).

Salah satu topik penelitian dalam teori graf yang masih berkembang adalah dimensi metrik. Dimensi metrik pertama kali dikenalkan pada tahun oleh (Khuller, Raghavachari, & Rosenfeld, 1996). Selanjutnya Chartrand *et al.* (2000) menjelaskan konsep tentang resolving set pada suatu graf G sebagai berikut. Misalkan G adalah graf terhubung dan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ adalah sebuah himpunan terurut dari beberapa simpul di G. Untuk setiap simpul v di G, representasi metrik dari v terhadap W adalah vektor k-tupel $r(v \mid W) = \big(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)\big)$ dengan $d(x, y)$ menyatakan jarak antara simpul x dan y di G yakni panjang lintasan terpendek yang menghubungkan simpul x dan simpul y di dalam graf G. Himpunan W disebut sebagai himpunan pembeda *(resolving set*) untuk graf G jika setiap dua simpul yang berbeda di G memiliki representasi metrik yang berbeda, yaitu $r(\, u \mid W\,) \neq r(\, v \mid W\,)$ untuk setiap $u \neq v$. Dimensi metrik dari graf G, yang dilambangkan $dim(G)$, adalah kardinalitas minimum (ukuran terkecil) dari semua himpunan pembeda di G. Dalam menentukan dimensi metrik suatu graf dengan struktur tertentu, diperlukan analisis terhadap subkelas graf yang telah diteliti sebelumnya agar proses penentuan dimensi metrik untuk graf yang lebih umum dapat dilakukan secara lebih sistematis.

Operasi join pada dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$, adalah graf G dimana $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G)\, E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ (Gould, 2013). Menemukan dimensi metrik dari operasi join graf lengkap dan graf tangga merupakan topik yang menarik untuk dipertimbangkan. Rawat dan Pradhan (2017) mengembangkan dimensi metrik pada graf hasil operasi join.

Beberapa penelitan terdahulu mengenai dimensi metrik dari beberapa kelas graf adalah karakterisasi dimensi metrik dari graf roda (Shanmukha, Sooryanarayana, & Harinath, 2002), dimensi metrik dan dimensi partisi dari famili graf tangga (Saifudin, 2016), dimensi metrik dari graf buku ganda (Ilmayasinta, 2019), dimensi metrik dari graf dual antiprisma (Fitriani & Cahyaningtyas, 2021), dimensi metrik dari graf jaring laba-laba (Janan & Janan, 2022).

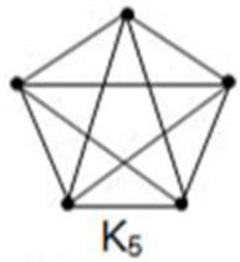
Sedangkan penelitian terdahulu yang membahas mengenai pengembangan konsep dimensi metrik adalah dimensi metrik lokal (Azka, Palupi, & Sutjijana, 2022), dimensi metrik kuat pada beberapa graf terkait graf roda (Kusmayadi, Kuntari, Rahmadi, & Lathifah, 2016), dimensi k-metrik dari graf double fan (Rahmadi & Susanti, 2022), dimensi metrik dan dimensi partisi dari graf double fan (Silalahi & Mulyono, 2023), dimensi metrik campuran pada graf double fan (Rahmadi, Dimensi metrik campuran pada graf double fan, 2024), dimensi metrik local pada graf garis dan graf persahabatan (Lathifah, 2024).

Dikarenakan dari hasil penelitian sebelumnya belum ada yang membahas tentang dimensi metrik dari operasi join graf lengkap dan graf tangga, maka dalam penelitian ini akan dianalisis dimensi metrik dari operasi join graf lengkap dan graf tangga.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

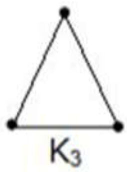
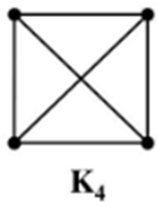
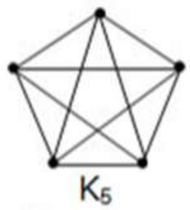
2.1. Dimensi Metrik Graf Lengkap

Graf lengkap dengan n titik adalah graf sederhana dengan n titik dan setiap dua titik saling bertetangga. Graf lengkap dengan n titik tersebut dilambangkan dengan K_n. Gambar 1 adalah contoh graf lengkap dengan order 5.



Gambar 1. Graf Lengkap Order 5

Tabel 1. Dimensi Metrik Graf Lengkap

Dimensi Metrik graf K_3	**Dimensi Metrik graf K_4**	**Dimensi Metrik graf K_5**
		
Dimensi metrik = 2	Dimensi metrik = 3	Dimensi metrik = 4

Berdasarkan pemaparan dimensi metrik pada graf lengkap didapatkan dimensi metrik graf $K_n = n - 1$. Akan dibuktikan pernyataan tersebut benar untuk $n \geq 3$. Misalkan $W = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ dan $|W| = n - 1$. Akan dibuktikan bahwa $W = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ adalah himpunan pembeda. Berikut diberikan representasi setiap titip pada graf K_n terhadap W.

$$\begin{gathered} r(v_1|W) = (0,1,\dots,1,1) \\ r(v_2|W) = (1,0,1,\dots,1,1) \\ \vdots \\ r(v_{n-1}|W) = (1,1,\dots,1,0) \\ r(v_n|W) = (1,1,\dots,1,1) \end{gathered}$$

Oleh karena $\forall v_i, v_j \in V(K_n)$, $v_i \neq v_j$ dan $r(v_i|W) \neq r(v_j|W)$ maka $W = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ adalah himpunan pembeda.

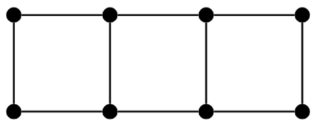
Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $W = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ himpunan pembeda minimum. Misal ada himpunan $X = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-2}\}$ dengan $|X| = n - 2$. Berikut representasi setiap titik pada K_n terhadap $X = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-2}\}$.

$$
\begin{gathered}
r(v_1|X) = (0,1, \dots,1,1) \\
r(v_2|X) = (1,0,1, \dots,1,1) \\
\vdots \\
r(v_{n-3}|X) = (1,1, \dots,1,0,1) \\
r(v_{n-2}|X) = (1,1, \dots,1,0) \\
r(v_{n-1}|X) = (1,1, \dots,1,1) \\
r(v_n|X) = (1,1, \dots,1,1)
\end{gathered}
$$

Oleh karena $\exists v_{n-1}, v_n \in V(K_n)$, $v_{n-1} \neq v_n$ dan $r(v_{n-1}|X) = r(v_n|X)$, maka $X = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-2}\}$ bukan himpunan pembeda. Akibatnya W dengan kardinalitas $n - 1$ merupakan himpunan pembeda minimum. Dengan demikian, diperoleh $\dim(K_n) = n - 1$.

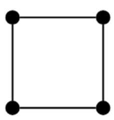
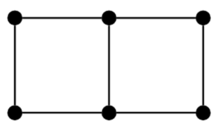
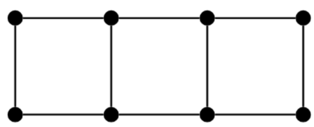
2.2. Dimensi Metrik Graf Tangga

Graf tangga yang dinotasikan dengan L_n adalah graf sederhana yang dibentuk seperti tangga dengan n anak tangga. Berikut diberikan contoh graf L_4.



Gambar 2. Graf Tangga Order 4

Tabel 2. Dimensi Metrik Graf Tangga

Dimensi Metrik graf L_2	**Dimensi Metrik graf L_3**	**Dimensi Metrik graf L_4**
		
Dimensi metrik = 2	Dimensi metrik = 2	Dimensi metrik = 2

Dapat diperhatikan bahwa dimensi metrik graf $L_n = 2$. Akan dibuktikan pernyataan tersebut benar untuk $n \geq 2$. Misalkan $W = \{v_1, v_2\}$ dimana $v_1 = x_i, v_2 = y_i$ dan $|W| = 2$. Akan dibuktikan bahwa $W = \{v_1, v_2\}$ adalah himpunan pembeda. Berikut diberikan representasi setiap titik pada graf L_n terhadap W.

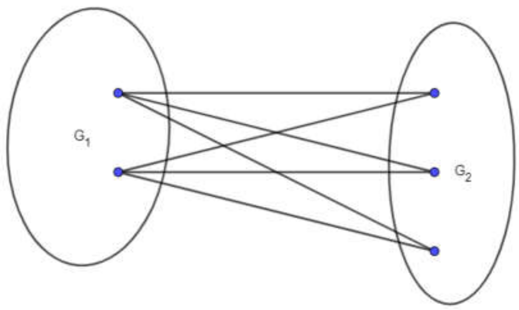
$$r(x_i|W) = (i-1, i) \text{ untuk } 1 \leq i \leq n;$$
$$r(y_i|W) = (i, i-1) \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

Oleh karena $\forall x_i, y_i \in V(L_n)$, $x_i \neq y_i$ dan $r(x_i|W) \neq r(y_i|W)$ maka $W = \{v_1, v_2\}$ adalah himpunan pembeda.

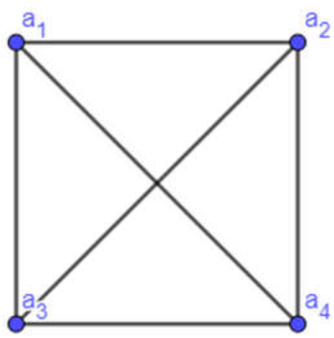
Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $W = \{v_1, v_2\}$ himpunan pembeda minimum. Misal ada himpunan $X = \{v_1\}$ dengan $|X| = 1$. Jelas bahwa X bukan himpunan pembeda karena pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik pada L_n dengan representasi sama. Akibatnya W dengan kardinalitas 2 merupakan himpunan pembeda minimum. Dengan demikian, diperoleh $\dim(L_n) = 2$.

2.3. Dimensi Metrik Graf Hasil Operasi Join

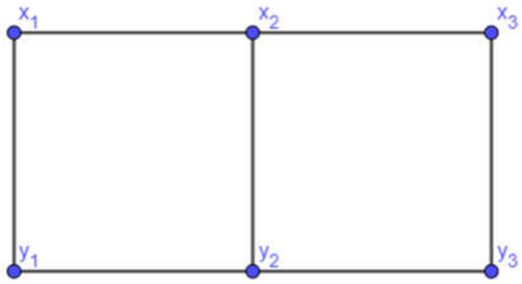
Operasi graf digunakan untuk membentuk suatu graf baru. Dalam penelitian ini menggunakan operasi join pada graf lengkap dan graf tangga. Berikut definisi operasi join pada graf. Join dari graf G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$ merupakan graf yang terdiri dari gabungan $G_1 \cup G_2$ dan semua sisi yang menghubungkan antara V_1 dan V_2 (Harary & Frucht, 1969). Operasi Join pada graf dapat dilihat pada Gambar 3.



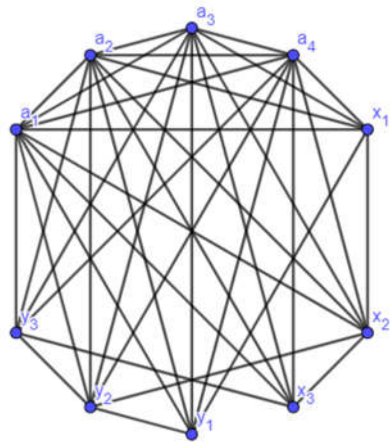
Gambar 3. Ilustrasi Operasi Join Graf G_1 dan G_2



Gambar 4. Graf K_4



Gambar 5. Graf L_3

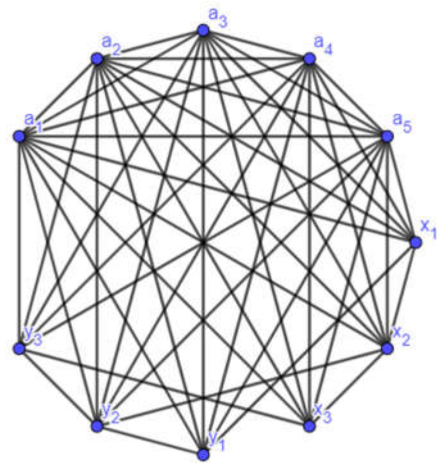


Gambar 6. Graf $K_4 + L_3$

Dari Gambar 6, dipilih $S_1 = \{a_1, a_2, a_3, x_1, y_1\}$ sebagai himpunan pembeda minimal dari graf $K_4 + L_3$. Berikut diberikan representasi setiap titik pada graf $K_4 + L_3$ terhadap S_1.

$$r(a_4 \mid S_1) = (1,1,1,1,1)$$
$$r(x_2 \mid S_1) = (1,1,1,1,2)$$
$$r(x_3 \mid S_1) = (1,1,1,2,3)$$
$$r(y_2 \mid S_1) = (1,1,1,2,1)$$
$$r(y_3 \mid S_1) = (1,1,1,3,2)$$

Dari representasi diatas benar bahwa S_1 merupakan himpunan pembeda minimal dari graf $K_4 + L_3$.Sehingga dapat disimpulkan bahwa $dim(K_4 + L_3) = |S_1| = 5$.

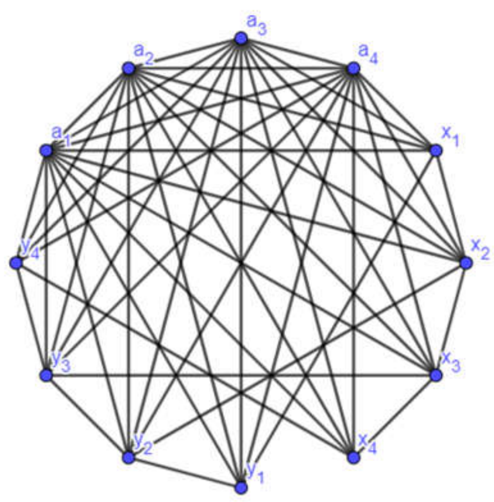


Gambar 7. Graf $K_4 + L_3$

Dari Gambar 7, dipilih $S_2 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, x_1, y_1\}$ sebagai himpunan pembeda minimal dari graf $K_5 + L_3$. Berikut diberikan representasi setiap titik pada graf $K_5 + L_3$ terhadap S_2.

$$r(a_5 \mid S_2) = (1,1,1,1,1,1)$$
$$r(x_2 \mid S_2) = (1,1,1,1,1,2)$$
$$r(x_3 \mid S_2) = (1,1,1,1,2,3)$$
$$r(y_2 \mid S_2) = (1,1,1,1,2,1)$$
$$r(y_3 \mid S_2) = (1,1,1,1,3,2)$$

Dari representasi diatas benar bahwa S_2 merupakan himpunan pembeda minimal dari graf $K_5 + L_3$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $dim(K_5 + L_3) = |S_2| = 6$.



Gambar 8. Graf $K_4 + L_4$

Dari Gambar 8, dipilih $S_3 = \{a_1, a_2, a_3, x_1, y_1\}$ sebagai himpunan pembeda minimal dari graf $K_4 + L_4$. Berikut diberikan representasi setiap titik pada graf $K_4 + L_4$ terhadap S_3.

$$
\begin{gathered}
r(a_4 \mid S_3) = (1,1,1,1,1)\\
r(x_2 \mid S_3) = (1,1,1,1,2)\\
r(x_3 \mid S_3) = (1,1,1,2,3)\\
r(x_4 \mid S_3) = (1,1,1,3,4)\\
r(y_2 \mid S_3) = (1,1,1,2,1)\\
r(y_3 \mid S_3) = (1,1,1,3,2)\\
r(y_4 \mid S_3) = (1,1,1,4,3)
\end{gathered}
$$

Dari representasi diatas benar bahwa S_3 merupakan himpunan pembeda minimal dari graf $K_4 + L_4$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $dim(K_4 + L_4) = |S_3| = 5$.

Berdasarkan contoh di atas, namakan $G = K_n + L_m$ didapatkan $dim\,(G) = n + 1$ dengan $V(K_n) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dan $V(L_m) = \{x_1 x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Akan dibuktikan pernyataan tersebut benar untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$. Misalkan $W_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ dan $W_2 = \{x_i, y_i\}$, dengan $S = W_1 \cup W_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_i, y_i\}$, akan dibuktikan bahwa S adalah himpunan pembeda. Berikut diberikan representasi setiap titik pada graf G terhadap S.

$$
\begin{gathered}
r(a_1 \mid S) = (0,1, \dots ,1,1,1)\\
r(a_2 \mid S) = (1,0, \dots ,1,1,1)\\
\vdots\\
r(a_{n-1} | S) = (1,1, \dots ,0,1,1)\\
r(a_n \mid S) = (1,1, \dots ,1,1,1)\\
r(x_i \mid S) = (1,1, \dots ,1, i-1, i), \text{ untuk } 1 \leq i \leq m;\\
r(y_i \mid S) = (1,1, \dots ,1, i, i-1), \text{ untuk } 1 \leq i \leq m.
\end{gathered}
$$

Karena $\forall v_i, v_j \in V(G),\ v_i \neq v_j$ dan $r(v_i|S) \neq r(v_j|S)$ maka $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_i, y_i\}$ adalah himpunan pembeda.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa S himpunan pembeda minimum. Misal $|S| = n$, maka pembuktian dibagi menjadi dua kasus. Kasus pertama dengan $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, x_i, y_i\}$ untuk $a_1, a_2, \dots, a_{n-2} \in V(K_n) \in V(G)$ dan $x_i, y_i \in V(L_m) \in V(G)$, kasus kedua dengan $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, v_i\}$ untuk $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in V(K_n) \in V(G)$ dan $v_i \in V(L_m) \in V(G)$. Berikut diberikan bukti dari kasus 1 dan kasus 2.

Kasus 1

Misal $|S| = n$ dengan $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, x_i, y_i\}$ untuk $a_1, a_2, \dots, a_{n-2} \in V(K_n) \in V(G)$ dan $x_i, y_i \in V(L_m) \in V(G)$. Berikut representasi setiap titik pada graf G terhadap $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, x_i, y_i\}$.

$$r(a_1|S) = (0,1, \dots ,1,1,1,1,1)$$
$$r(a_2|S) = (1,0, \dots ,1,1,1,1,1)$$
$$\vdots$$
$$r(a_{n-2}|S) = (1,1, \dots ,0,1,1,1,1)$$
$$r(a_{n-1}|S) = (1,1, \dots ,1,1,1,1,1)$$
$$r(a_n|S) = (1,1, \dots ,1,1,1,1,1)$$
$$r(x_i|S) = (1,1, \dots ,1,1,1, i-1, i), \text{ untuk } 1 \le i \le m$$
$$r(y_i|S) = (1,1, \dots ,1,1,1, i, i-1), \text{ untuk } 1 \le i \le m$$

Karena $\exists a_{n-1}, a_n \in V(G)$, $a_{n-1} \neq a_n$ dan $r(a_{n-1}|S) = r(a_n|S)$, maka $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, x_i, y_i\}$ bukan himpunan pembeda.

Kasus 2

Misal $|S| = n$ dengan $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, v_i\}$ untuk $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in V(K_n) \in V(G)$ dan $v_i \in V(L_m) \in V(G)$. Diperoleh bahwa S bukan himpunan pembeda karena ditemukan sedikitnya dua titik pada G dengan representasi sama. Sehingga $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, v_i\}$ bukan himpunan pembeda.

Akibat dari kedua kasus diatas maka S dengan kardinalitas $n+1$ atau $|S| = n+1$ merupakan himpunan pembeda minimum. Dengan demikian, diperoleh $\dim(G) = n+1$.

3. SIMPULAN

Berdasarkan penelitian ini, diperoleh kesimpulan sebagai berikut. Dimensi metrik graf lengkap K_n adalah $n-1$. Dimensi metrik graf tangga L_n adalah 2. Dimensi metrik graf yang diperoleh dari hasil operasi join graf lengkap dan graf tangga $K_n + L_m$ adalah $n+1$.

4. DAFTAR PUSTAKA

Azka, D., Palupi, D., & Sutjijana, A. (2022). Dimensi Metrik Lokal dari Hasil Perkalian Kuat Graf Bintang. *Journal Fourier*, 49-58.

Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M. A., & Oellermann, O. R. (2000). Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Appl. Math*, 99-113.

Estrada-Moreno, A., Rodriguez-Velazquez, J., & Yero, I. (2015). The k-metric dimension of a graph. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 2829-2840.

Fitriani, F., & Cahyaningtyas, S. (2021). Graf Dual Antiprisma Dan Dimensi Metriknya. *E-Jurnal Matematika*, 313.

Gould, R. (2013). *Graph Theory.* New York: Dover Publications.

Harary, F., & Frucht, R. (1969). *Graph Theory.* Philippines: Addison-Wesley.

Ilmayasinta, N. (2019). Dimensi Metrik Pada Graf Buku Ganda. *Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*, 21-27.

Janan, T., & Janan, S. (2022). Dimensi Metrik dari Graf Jaring Laba-Laba. *Proximal: Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika*, 181-190.

Kelenc, A., Tratnik, N., & Yero, I. (2018). Uniquely identifying the edges of a graph: The edge metric dimension. *Discrete Appl. Math*, 204-220.

Khuller, S., Raghavachari, B., & Rosenfeld, A. (1996). Landmarks in Graph. *Discrete Appl. Math.*, 230-236.

Kusmayadi, T. A., Kuntari, S., Rahmadi, D., & Lathifah, F. A. (2016). On the strong metric dimension of some related wheel graph. *Far East Journal of Mathematical Sciences* , 1325-1334.

Lathifah, F. (2024). Dimensi Metrik Lokal pada Graf Garis dari Graf Persahabatan. *Jurnal Kajian dan Terapan Matematika*, 53-58.

Nie, K., & Xu, K. (2024). The doubly metric dimensions of cactus graphs and block graphs. *J Comb Optim*.

Okamoto, F., Phinezy, B., & Zhang, P. (2010). The local metric dimension of a graph. *Math. Bohemica*, 239-255.

Rahmadi, D. (2024). Dimensi metrik campuran pada graf double fan. *Jurnal Diferensial*, 52-56.

Rahmadi, D., & Susanti, Y. (2022). The k-metric dimension of double fan graph. *Quadratic: Journal of Innovation and Technology in Mathematics and Mathematics Education*, 31-35.

Rawat, B., & Pradhan, P. (2017). Metric Dimension of Some Graphs under Join Operation. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 3331-3348.

Saifudin, I. (2016). Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi dari Famili Graf Tangga. *JUSTINDO: Jurnal Sistem dan Teknologi Informasi Indonesia*, 105-112.

Sebo, A., & Tannier, E. (2004). On Metric generators of graphs. *Math. Opr. Res.*, 383-393.

Shanmukha, B., Sooryanarayana, B., & Harinath, K. S. (2002). Metric dimension of wheels. *Far East Journal of Applied Mathematics*, 217-229.

Silalahi, R., & Mulyono. (2023). Metric dimensions and partition dimensions of a multiple fan graph. *Formosa Journal of Science and Technology*, 81-88.

Tillquist, R., Frongillo, R., & Lladser, M. (2021). Getting the Lay of the Land inDiscrete Space: A Survey of Metric Dimension and its Applications. 1-29.