



## **Sifat-Sifat Matriks Normal dalam Aljabar Max-Plus**

Any Muanalifah<sup>1\*</sup>, Yulia Romadiastri<sup>2</sup>, Muhammad Ulil Albab<sup>3</sup>, Nurwan<sup>4</sup>,  
Rosalio G. Artes<sup>5</sup>, Ainun Esti Candra<sup>6</sup>

<sup>1,2,3,6</sup> UIN Walisongo Semarang, <sup>4</sup> Universitas Negeri Gorontalo,

<sup>5</sup> Mindanao State University - Tawi-Tawi Collage of Technology and Oceanography

\* [any.muanalifah@walisongo.ac.id](mailto:any.muanalifah@walisongo.ac.id)

### **ABSTRAK**

Dalam aljabar max-plus, matriks normal didefinisikan sebagai matriks persegi  $n \times n$  dimana elemen pada diagonal utamanya adalah nol dan elemen non diagonal utamanya adalah bilangan real non positif. Struktur ini memberikan sifat keteraturan khusus terhadap operasi maksimum dan penjumlahan pada aljabar maxplus. Pada artikel ini akan di bahas review tentang matriks normal dan perilaku stabil terhadap perpangkatan, termasuk kondisi tertentu yang menjamin sifat idempoten. Selain itu, diperoleh kriteria struktural yang memastikan kekomutatifan dua matriks normal terhadap perkalian max-plus.

**Kata Kunci:** aljabar max-plus, matriks normal, matriks komutatif, idempotent.

### **ABSTRACT**

*In the tropical algebra, a normal matrix is defined as a square matrix whose diagonal entries are zero and whose off-diagonal entries are non-positive real numbers. This structure induces a particular regularity with respect to the maximum and tropical addition operations in max-plus algebra. Normal matrices exhibit stable behavior under tropical powers, including conditions that ensure idempotency. Furthermore, structural criteria are established to guarantee the commutativity of two normal matrices under max-plus multiplication.*

**Keywords:** max-plus algebra, normal matrix, commutative matrice, idempotent.

## 1. PENDAHULUAN

Aljabar max-plus merupakan salah satu struktur aljabar yang banyak digunakan dalam kajian sistem kejadian diskrit, penjadwalan (Rauf, Nurwan, Yahya, & Nuha, 2021), teori antrian (Nurdin, Yahya, Hasan, & Nurwan, 2023), optimisasi (Bernhard, 2000) dan kriptografi (Muanalifah & Sergeev, 2022). Struktur ini diperoleh dengan mendefinisikan operasi penjumlahan sebagai maksimum dan operasi perkalian sebagai penjumlahan biasa pada himpunan bilangan real yang diperluas dengan elemen  $-\infty$  (Baccelli, Cohen, Olsder, & Quadrat, 1992).

Berbeda dengan aljabar linear klasik, yaitu aljabar linear yang dibangun di atas struktur lapangan (*field*) seperti  $\mathbb{R}$  atau  $\mathbb{C}$  dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa, aljabar max-plus memiliki karakteristik yang khas, seperti sifat idempoten pada operasi penjumlahan serta tidak berlakunya hukum invers aditif. Konsekuensinya, berbagai konsep dan hasil dalam teori matriks klasik tidak dapat diterapkan secara langsung dalam konteks max-plus. Hal ini mendorong pengembangan teori matriks atas aljabar max-plus sebagai bidang kajian yang berdiri sendiri.

Salah satu kelas matriks yang memiliki struktur khusus adalah matriks normal (Linde & De La Puente, 2015). Matriks normal atas aljabar max-plus didefinisikan sebagai matriks persegi dengan entri diagonal utama bernilai nol dan entri non-diagonal bernilai kurang dari atau sama dengan nol. Struktur tersebut memberikan keteraturan tertentu terhadap operasi perkalian max-plus dan perpangkatan matriks. Matriks normal menunjukkan perilaku stabil terhadap pangkat tropikal dan dalam kondisi tertentu dapat bersifat idempoten. Selain itu, meskipun perkalian matriks max-plus pada umumnya tidak komutatif, terdapat kriteria struktural tertentu yang menyebabkan dua matriks normal bersifat komutatif.

Berdasarkan latar belakang tersebut, penelitian ini bertujuan untuk mengkaji sifat-sifat struktural matriks normal dalam aljabar max-plus, khususnya yang berkaitan dengan perilaku perpangkatan dan kondisi komutativitasnya. Kajian ini diharapkan dapat memberikan pemahaman yang lebih sistematis mengenai struktur aljabar matriks normal dalam kerangka max-plus serta memperkuat landasan teoritis dalam studi aljabar tropikal.

## 2. ALJABAR MAX-PLUS

Pada bagian ini diberikan definisi formal aljabar max-plus beserta sifat-sifat dasarnya yang menjadi landasan pembahasan matriks normal dan sifat komutatif pada bagian selanjutnya.

**Definisi 2.1** (Aljabar Max-Plus). Diberikan himpunan

$$R_{\max} = \mathbb{R} \cup -\infty.$$

Pada himpunan ini didefinisikan dua operasi biner, yaitu penjumlahan  $\oplus$  dan perkalian  $\otimes$ , dengan aturan

$$a \oplus b = \max(a, b), \quad a \otimes b = a + b,$$

untuk setiap  $a, b \in R_{\max}$ .

### Sifat-Sifat Aljabar Max-Plus

Untuk setiap  $a, b, c \in R_{\max}$ , aljabar max-plus memenuhi sifat-sifat berikut.

**1. Asosiatif**

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c), (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c).$$

**2. Komutatif pada operasi  $\oplus$**

$$a \oplus b = b \oplus a.$$

**3. Distributif**

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c).$$

**4. Idempoten pada operasi  $\oplus$**

$$a \oplus a = a.$$

Sifat-sifat ini menunjukkan bahwa aljabar max-plus bukan merupakan ring, melainkan suatu *semiring idempoten*.

**Contoh 2.2** (Operasi Dasar dalam Aljabar Max-Plus). Misalkan  $a = 4$  dan  $b = -7$ . Maka diperoleh

$$a \oplus b = \max(4, -7) = 4,$$

$$a \otimes b = 4 + (-7) = -3.$$

Jika  $b = \varepsilon$ , maka

$$a \oplus \varepsilon = 4, a \otimes \varepsilon = \varepsilon.$$

**Definisi 2.3** (Pepangkatan dalam Aljabar Max-Plus). Untuk setiap  $a, b \in R_{\max}$  dan  $r \in \mathbb{N}$ , pepangkatan max-plus didefinisikan sebagai

$$a^{(\otimes r)} = \underbrace{(a \otimes a \otimes \cdots \otimes a)}_{(r \text{ kali})} = r \cdot a.$$

Selain itu, didefinisikan  $a^{(\otimes r)} = 0$ .

**Contoh 2.4** (Pepangkatan Max-Plus). Misalkan  $a = -3$  dan  $r = 5$ . Maka

$$a^{(\otimes 5)} = 5 \cdot (-3) = -15.$$

**Definisi 2.5** (Relasi Urutan Alami). Didefinisikan relasi  $\leq$  pada  $R_{\max}$  sebagai relasi urutan biasa pada bilangan real, dengan  $\varepsilon \leq a$  untuk setiap  $a \in R_{\max}$ .

Relasi ini konsisten dengan operasi  $\oplus$ , karena

$$a \oplus b = \max(a, b)$$

merupakan supremum dari  $a$  dan  $b$ .

**Contoh 2.6** (Interpretasi Aljabar Max-Plus). Jika  $a$  dan  $b$  diinterpretasikan sebagai waktu tempuh dua proses, maka:

- $a \oplus b$  menyatakan waktu maksimum yang diperlukan untuk menyelesaikan kedua proses secara paralel,
- $a \otimes b$  menyatakan waktu total jika proses dilakukan secara berurutan.

Interpretasi ini menjelaskan mengapa aljabar max-plus banyak digunakan dalam pemodelan sistem kejadian diskrit.

**Remark 2.7** Sifat idempoten pada operasi  $\oplus$  menyebabkan banyak hasil dalam aljabar max-plus tidak memiliki analog langsung dalam aljabar linear klasik. Hal inilah yang menjadi salah satu alasan utama mengapa struktur matriks dan sifat komutatif dalam aljabar max-plus perlu dikaji secara khusus.

Operasi aritmetika dalam aljabar max-plus dapat diperluas dalam operasi penjumlahan dan perkalian matriks sebagai berikut

**Definisi 2.8** (Penjumlahan Matriks) Misalkan  $A = (a_{ij})$  dan  $B = (b_{ij})$  adalah matriks berordo  $m \times n$  pada  $R_{\max}$ . Penjumlahan matriks max-plus didefinisikan oleh

$$(A \oplus B)_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\}.$$

**Definisi 2.9** (Perkalian Matriks) (Butkovic, 2010). Misalkan  $A \in R_{\max}^{(m \times n)}$  dan  $B \in R_{\max}^{(n \times p)}$ . Perkalian matriks max-plus didefinisikan oleh

$$(A \otimes B)_{ik} = \max_{(1 \leq j \leq n)} \{a_{ij} + b_{jk}\}.$$

Selanjutnya juga akan diperkenalkan beberapa definisi matriks dalam aljabar max-plus

**Definisi 2.10** (Matriks Identitas) Matriks identitas max-plus berordo  $n$ , dilambangkan  $I_n$ , didefinisikan oleh

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ -\infty, & i \neq j \end{cases}$$

**Definisi 2.11** (Matriks Diagonal) Suatu matriks persegi  $A = (a_{ij}) \in R_{\max}^{n \times n}$  disebut matriks diagonal dalam aljabar max-plus apabila

$$a_{ij} = -\infty \quad \text{untuk setiap } i \neq j$$

Dengan demikian, seluruh elemen di luar diagonal utama bernilai  $-\infty$ , sedangkan elemen pada diagonal utama  $a_{ii}$  dapat berupa sembarang elemen dalam  $R_{\max}$ .

Bentuk umum matriks diagonal berordo  $n$  adalah

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & -\infty & \cdots & -\infty \\ -\infty & a_{22} & \cdots & -\infty \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\infty & -\infty & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Pada section selanjutnya kita akan membahas sifat-sifat matriks normal.

### 3. SIFAT-SIFAT MATRIKS NORMAL ALJABAR MAX-PLUS

#### 3.1 Sifat Komutatif Matriks Normal

Pada bagian ini dibahas sifat komutatif matriks normal atas aljabar max-plus. Secara umum, perkalian matriks pada aljabar max-plus tidak bersifat komutatif (Heidergott, Olsder, & van, 2005). Namun demikian, untuk kelas matriks tertentu, khususnya matriks normal, dapat ditentukan kondisi yang menjamin kekomutatifan. Sebelum membahas kelas matriks normal komutatif yang lebih umum, diperkenalkan terlebih dahulu salah satu subkelas matriks normal yang sering digunakan dalam kajian komutativitas.

Sebelum membahas kasus umum, terlebih dahulu ditinjau sifat komutatif pada matriks normal berordo dua. Dalam lemma berikut dijelaskan bahwa matriks normal dengan ordo 2 berlaku sifat komutatif.

**Lemma 3.2** (Linde & De La Puente, 2015) *Untuk setiap  $A, B \in R_{nor}^2$ , berlaku*

$$A \otimes B = B \otimes A = A \oplus B.$$

Misalkan

$A = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & -c \\ -d & 0 \end{bmatrix}$  dengan  $a, b, c, d \geq 0$ . Dengan menggunakan definisi perkalian matriks max-plus diperoleh

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & \max(-a, -c) \\ \max(-b, -d) & 0 \end{bmatrix} = A \oplus B.$$

Perhitungan serupa menunjukkan bahwa  $B \otimes A = A \oplus B$ .

Dengan demikian  $A \otimes B = B \otimes A$ .

Hasil di atas menunjukkan bahwa pada ordo dua, matriks normal selalu bersifat komutatif. Namun, untuk  $n \geq 3$ , sifat ini tidak lagi berlaku secara umum (Linde and Puente, 2015) seperti pada contoh berikut:

**Contoh 3.3** (Counter Example)

Misalkan

$A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -5 & 0 & -4 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 \\ -4 & 0 & -1 \\ -5 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ . Kedua matriks tersebut adalah matriks normal berordo 3.

Hasil perkalian max-plus diperoleh

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 \\ -4 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 \\ -3 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena  $A \otimes B \neq B \otimes A$ , maka  $A$  dan  $B$  tidak komutatif.

**Remark 3.4** *Setiap matriks Linde-de la Puente merupakan matriks normal atas aljabar max-plus.*

Selanjutnya karena matriks normal tidak komutatif untuk ordo matriks lebih dari 2 maka Linde dan De la Puente mendefinisikan matriks baru yang diturunkan dari definisi matriks normal dengan memberikan beberapa syarat khusus seperti pada definisi berikut:

**Definisi 3.5** (Matriks Linde de la Puente) (Linde & De La Puente, 2015) *Misalkan  $n \in \mathbb{N}$  dan  $r \leq 0$  adalah bilangan real tak-positif. Suatu matriks persegi  $A = (a_{ij}) \in R_{max}^{n \times n}$  dikatakan memenuhi kondisi interval  $[2r, r]$  apabila  $a_{ii} = 0$  untuk setiap  $i \in \{1, \dots, n\}$ , dan untuk setiap  $i \neq j$  berlaku  $2r \leq a_{ij} \leq r$ .*

Dengan kata lain, seluruh elemen diagonal utama bernilai nol, dan seluruh elemen non-diagonal berada dalam interval tertutup  $[2r, r]$ .

Akan di definisikan juga himpunan matriks normal yang komutatif sebagai berikut.

**Definisi 3.6** Untuk suatu matriks normal  $A \in R_{nor}^2$ , didefinisikan himpunan

$$K(A) = \{B \in R_{nor}^n \mid A \otimes B = B \otimes A\}.$$

Himpunan  $K(A)$  disebut himpunan matriks normal yang komutatif dengan  $A$  (Linde & De La Puente, 2015).

Matriks Linde De la Puente ternyata memenuhi sifat komutatif seperti pada teorema berikut.

**Teorema 3.7** (Linde & De La Puente, 2015) Untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$  dan setiap bilangan real tak-positif  $r$ , sebarang dua matriks berordo  $n$ , yaitu  $A$  dan  $B$ , yang memiliki diagonal utama bernilai nol dan seluruh elemen non-diagonal berada dalam interval tertutup  $[2r, r]$ , memenuhi

$$A \otimes B = B \otimes A = A \oplus B$$

Secara khusus,  $B$  termasuk dalam himpunan matriks yang komutatif terhadap  $A$ .

*Bukti.* Misalkan  $a_{ii} = b_{ii} = 0$  dan  $2r \leq a_{ij}, b_{ij} \leq r \leq 0$  untuk setiap  $i \neq j$ .

Ambil  $i \neq j$ . Untuk setiap  $k$  berlaku

$$a_{ik} + b_{kj} \leq 2r$$

Karena  $2r \leq a_{ij}$  dan  $2r \leq b_{ij}$ , maka dari definisi perkalian matriks max-plus diperoleh

$$(A \otimes B)_{ij} = a_{ij} \text{ dan } (B \otimes A)_{ij} = b_{ij}.$$

Dengan demikian,  $A \otimes B = B \otimes A$ . ■

Matriks Linde De la Puente ini juga bisa diperumum dengan menggunakan diagonal utamanya adalah bilangan real positif dan masih bisa memenuhi sifat komutatif pada teorema berikut.

**Teorema 3.8** (Muanalifah & Sergeev, 2020) Misalkan  $A \in [2r, r]_n^{k_1}$  dan  $B \in [2s, s]_n^{k_2}$  untuk suatu  $r, s \leq 0$ , dengan elemen diagonal memenuhi

$$a_{ii} = k_1 \geq 0 \text{ dan } b_{ii} = k_2 \geq 0.$$

Maka berlaku

$$A \otimes B = B \otimes A = k_2 \otimes A \oplus k_1 \otimes B.$$

*Bukti.* Untuk setiap  $i, j$ , berdasarkan definisi perkalian matriks max-plus diperoleh

$$(A \otimes B)_{ij} = a_{ii} \otimes b_{ij} \oplus a_{ij} \otimes b_{jj} \bigoplus_{p \neq i, j} a_{ip} \otimes b_{pj}$$

Karena  $a_{ii} = k_1$  dan  $b_{jj} = k_2$ , maka

$$(A \otimes B)_{ij} = k_1 \otimes b_{ij} \oplus k_2 \otimes a_{ij} \bigoplus_{p \neq i, j} a_{ip} \otimes b_{pj}$$

Selanjutnya, untuk setiap  $p \neq i, j$ , berlaku

$$a_{ip} + b_{pj} \leq r + s$$

Karena  $r, s \leq 0$ , diperoleh

$$r + s \leq \max(2r, 2s) \leq \max(a_{ij}, b_{ij})$$

Dengan demikian,  $a_{ip} \otimes b_{pj} \leq k_1 \otimes b_{ij} \oplus k_2 \otimes a_{ij}$ . Akibatnya,  $(A \otimes B)_{ij} = k_1 \otimes b_{ij} \oplus k_2 \otimes a_{ij}$ .

Dengan cara yang sama diperoleh  $(B \otimes A)_{ij} = k_1 \otimes b_{ij} \oplus k_2 \otimes a_{ij}$ .

Sehingga  $A \otimes B = B \otimes A = k_2 \otimes A \oplus k_1 \otimes B$ . ■

Selain matriks elementer, kelas matriks lain yang penting adalah matriks yang berkaitan dengan matriks Kleene star.

**Definisi 3.9** (Butkovic, 2010) Untuk  $A \in R_{nor}^n$ , matriks Kleene star dari  $A$  didefinisikan sebagai

$$A^* = I \oplus A \oplus A^{(\otimes 2)} \oplus \dots \oplus A^{(\otimes (n-1))},$$

sebagaimana diperkenalkan dalam (Heidergott, Olsder, & van, 2005).

**Teorema 3.10** (Linde & De La Puente, 2015) Untuk setiap  $A \in R_{nor}^n$ , berlaku

$$A \otimes A^* = A^* \otimes A = A^*.$$

Dengan demikian,  $A^* \in K(A)$ .

*Bukti.* Bukti diperoleh langsung dari definisi  $A^*$  sebagai supremum hingga dari perpangkatan  $A$  serta sifat asosiatif dan distributif perkalian matriks max-plus (Heidergott, Olsder, & van, 2005).

Hasil-hasil pada bagian ini memperlihatkan bahwa meskipun perkalian matriks pada aljabar max-plus tidak bersifat komutatif secara umum, terdapat berbagai kelas matriks normal yang saling komutatif. Struktur ini memberikan gambaran yang lebih jelas mengenai bentuk himpunan  $K(A)$  untuk suatu matriks normal  $A$ .

### 3.2 Periodisitas dan Idempoten Matriks Normal

Pada bagian ini dikaji perilaku perpangkatan matriks normal dalam aljabar max-plus. Perpangkatan matriks memiliki interpretasi graf yang kuat, karena setiap entri hasil perpangkatan merepresentasikan bobot maksimum lintasan dengan panjang tertentu. Oleh karena itu, sebelum membahas sifat idempoten dan periodisitas, terlebih dahulu didefinisikan perpangkatan matriks secara formal.

**Definisi 3.11** (Perpangkatan matriks) Misalkan  $A = (a_{ij}) \in R_{max}^{n \times n}$ . Perpangkatan matriks didefinisikan secara rekursif oleh

$$A^1 = A, \quad A^{k+1} = A \otimes A^k, \quad k \geq 1$$

Secara eksplisit, untuk setiap  $i, j$  berlaku

$$(A^2)_{ij} = \max_{1 \leq k \leq n} (a_{ik} + a_{kj}).$$

Lebih umum, entri  $(A^m)_{ij}$  menyatakan bobot maksimum dari semua lintasan sepanjang  $m$  dari simpul  $i$  ke simpul  $j$  pada graf berbobot yang bersesuaian dengan  $A$ .

Perilaku perpangkatan dapat menghasilkan dua kemungkinan utama, yaitu stabil dalam satu langkah (idempoten) atau berulang secara periodik setelah sejumlah langkah tertentu.

**Definisi 3.12** (Matriks Idempoten) Matriks  $A$  disebut idempoten apabila  $A^2 = A$ .

Secara ekuivalen, untuk setiap  $i, j$  berlaku

$$a_{ij} = \max_k (a_{ik} + a_{kj})$$

**Contoh 3.13** Misalkan

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh

$$(B^2)_{12} = \max(0 + (-1), -1 + 0) = -1$$

dan perhitungan serupa berlaku untuk semua entri. Dengan demikian  $B^2 = B$ , sehingga  $B$  idempoten.

Contoh di atas menunjukkan bahwa idempoten dapat terjadi. Namun demikian, tidak semua matriks normal bersifat idempoten.

**Contoh 3.14** (Counter Example) Terdapat matriks normal yang tidak idempoten.

*Bukti.* Pertimbangkan

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut normal.

Diperoleh

$$(C^2)_{31} = \max(-4 + 0, -1 + (-1), 0 + (-4)) = -2$$

Karena  $-2 > -4$ , maka  $C^2 \neq C$ .

Meskipun tidak selalu idempoten, matriks normal memiliki sifat monoton dasar terhadap kuadratnya.

**Lemma 3.15** Jika  $A$  matriks normal, maka  $A^2 \geq A$  dalam arti entri-demi-entri.

*Bukti.* Untuk setiap  $i, j$ ,

$$(A^2)_{ij} = \max_k (a_{ik} + a_{kj}).$$

Karena  $a_{jj} = 0$ , dengan memilih  $k = j$  diperoleh

$$(A^2)_{ij} \geq a_{ij} + a_{jj} = a_{ij}.$$

Maka  $A^2 \geq A$ . ■

Sifat monoton ini menjadi dasar munculnya perilaku periodik pada perpangkatan matriks normal.

**Definisi 3.16** (Periodisitas) (Sergeev, 2009) Barisan perpangkatan  $\{A^k\}_{k \geq 1}$  dikatakan *ultimately periodic* apabila terdapat bilangan bulat  $T \geq 0$  dan  $p \geq 1$  sehingga

$$A^{k+p} = A^k$$

untuk setiap  $k \geq T$ .

Bilangan  $T$  disebut *indeks transien* dan  $p$  disebut *periode*.

Konsep periodisitas menyatakan bahwa setelah sejumlah langkah tertentu, pola matriks mulai berulang secara teratur.

**Teorema 3.17** Jika  $A$  matriks normal, maka barisan  $\{A^k\}$  bersifat *ultimately periodic*.

*Bukti.* Karena semua entri non-diagonal tidak positif dan diagonal bernilai nol, setiap siklus pada graf berbobot memiliki bobot total tidak positif, dan terdapat siklus berbobot nol pada setiap simpul.

Lintasan maksimum tidak dapat mengandung siklus berbobot negatif, karena penghapusannya meningkatkan bobot. Maka lintasan maksimum hanya dapat mengandung siklus berbobot nol.

Karena jumlah simpul hingga, panjang siklus berbobot nol membentuk himpunan hingga.

Misalkan  $p$  adalah *gcd* dari panjang seluruh siklus tersebut. Untuk  $k$  cukup besar berlaku

$$A^{k+p} = A^k$$



Dengan demikian barisan perpangkatan bersifat *ultimately periodic*. ■

**Remark 3.18** *Idempoten merupakan kasus khusus periodisitas dengan periode  $p = 1$ .*

Dalam kelas matriks normal, salah satu kelas khusus yang memiliki struktur interval yang kuat adalah matriks Linde de la Puente. Struktur batas bawah dan batas atas pada entri non-diagonal menyebabkan ketaksamaan segitiga tropikal terpenuhi secara otomatis. Hal ini menghasilkan sifat idempoten berikut.

**Lemma 3.19** *Setiap matriks Linde de la Puente adalah idempoten.*

*Bukti.* Misalkan  $A = (a_{ij}) \in [2r, r]_n$  dengan  $r \leq 0$ , sehingga

$$a_{ii} = 0, 2r \leq a_{ij} \leq r, \quad (i \neq j).$$

Untuk setiap  $i, j, k$ , karena  $a_{ik} \leq r$  dan  $a_{kj} \leq r$ , maka  $a_{ik} + a_{kj} \leq r + r = 2r$ . Sementara itu, dari  $2r \leq a_{ij}$  diperoleh  $a_{ij} \geq 2r \geq a_{ik} + a_{kj}$ . Dengan demikian, untuk semua  $i, j, k$  berlaku  $a_{ij} \geq a_{ik} + a_{kj}$ .

Berdasarkan karakterisasi idempoten dalam aljabar max-plus, ketaksamaan tersebut ekuivalen dengan  $A^2 = A$ .

Jadi  $A$  adalah matriks idempoten. ■

#### 4. SIMPULAN

Pada artikel ini telah dikaji secara sistematis sifat-sifat struktural matriks normal dalam aljabar max-plus. Secara umum, meskipun perkalian matriks dalam aljabar max-plus tidak bersifat komutatif, diperoleh bahwa untuk kasus berordo dua setiap dua matriks normal selalu komutatif dan memenuhi hubungan  $A \otimes B = B \otimes A = A \oplus B$ .

Namun, untuk ordo lebih besar dari dua, sifat komutatif tidak berlaku secara umum. Meskipun demikian, terdapat kelas-kelas khusus matriks normal, seperti matriks Linde-de la Puente dan variasinya, yang tetap memenuhi sifat komutatif di bawah kondisi struktural tertentu.

Selain sifat komutatif, dikaji pula perilaku perpangkatan matriks normal. Diperoleh bahwa setiap matriks normal memenuhi sifat monoton dasar  $A^2 \geq A$ , dalam arti entri-demi-entri. Akan tetapi, matriks normal tidak selalu bersifat idempoten. Sifat idempoten terjadi tepat ketika tidak terdapat lintasan dua langkah yang memberikan bobot lebih besar daripada sisi langsung, yang secara ekuivalen memenuhi ketaksamaan segitiga dalam aljabar max-plus.

Lebih lanjut, ditunjukkan bahwa barisan perpangkatan matriks normal selalu bersifat *ultimately periodic*. Artinya, terdapat indeks transien dan periode tertentu sehingga setelah sejumlah langkah, pola matriks akan berulang secara periodik. Dalam hal khusus ketika matriks menjadi stabil setelah satu langkah, periodisitas tersebut mereduksi menjadi kasus idempoten dengan periode satu.

Hasil-hasil ini menunjukkan bahwa matriks normal dalam aljabar max-plus memiliki struktur aljabar yang teratur, baik dari sisi komutativitas maupun perilaku dinamis perpangkatannya. Kajian ini memberikan landasan teoritis yang lebih kuat dalam memahami struktur matriks normal serta membuka peluang penelitian lanjutan terkait klasifikasi matriks komutatif dan analisis spektral dalam kerangka aljabar max-plus.

## 5. ACKNOWLEDGMENT

Penelitian ini didanai oleh Bantuan Operasional Perguruan Tinggi Negeri (BOPTN) Universitas Islam Negeri (UIN) Walisongo Semarang pada Tahun Anggaran 2023. Dukungan pendanaan ini memungkinkan terlaksananya seluruh tahapan penelitian dengan baik.

## 6. DAFTAR PUSTAKA

- Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., & Quadrat, J.-P. (1992). *Synchronization and Linearity*. New York: Wiley.
- Bernhard, P. (2000). Max-plus algebra and Mathematical Fear in Dynamic Optimization. *Set-Valued Analysis*, 8(1), 71-84.
- Butkovic, P. (2010). *Max Linear Systems: Theory and Algorithms*. Springer.
- Heidergott, B., Olsder, G. J., & van , J. (2005). *Max Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications*. Princeton University Press.
- Linde, J., & De La Puente, M. (2015). Matrices Commuting with given Normal Tropical Matrix. *Linear Algebra and Its Applications*, 482(1), 101-121.
- Muanalifah, A., & Sergeev, S. (2020). Modifying the tropical version of Stickel's key exchange protocol. *Applications of Mathematics*, 65, 727-753.
- Muanalifah, A., & Sergeev, S. (2022). On the tropical discrete logarithm problem and security of a protocol based on tropical semidirect product. *Communication in Algebra*, 50(2), 861-879.
- Nurdin, S. A., Yahya, L., Hasan, I. K., & Nurwan, N. (2023). Model Antrian Pelayanan Terhadap Nasabah Bank BRI Menggunakan Petri Net dan Aljabar Max Plus. *Research in the Mathematical and Natural Science*, 2(2), 57-63.
- Rauf, M. A., Nurwan, N., Yahya, L., & Nuha, A. R. (2021). Model Penjadwalan Proyek Pembangunan Perumahan Menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus. *Jurnal Edukasi dan Sains Matematika*, 7(1).
- Sergeev, S. (2009). Max Algebraic Powers of Irreducible Matrices in the Periodic Regime: An Application of Cyclic Classes. *Linear Algebra and Its Applications*, 431(8), 1325-1339.