



Model SIRS *Nonlinear Incidence Rate* dengan Faktor Imigrasi Terinfeksi pada Penyebaran Penyakit COVID-19

Abdur Rahman Hakim¹, Oktarisa Ramadhanti², Granita^{3*}

^{1, 2, 3} Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau

* granita@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

COVID-19 adalah penyakit yang menyebar dengan cepat akibat tingginya mobilitas manusia, intensitas interaksi sosial, serta munculnya varian baru yang memungkinkan terjadinya infeksi ulang. Model SIR klasik umumnya masih mengasumsikan kekebalan permanen, menggunakan laju penularan linear, dan tidak mempertimbangkan adanya imigrasi individu, sehingga kurang mampu merepresentasikan penurunan imunitas, perubahan perilaku masyarakat, serta dinamika penyebaran penyakit yang lebih kompleks. Oleh karena itu, penelitian ini mengembangkan model SIR *nonlinear incidence rate* menjadi model SIRS *nonlinear incidence rate* dengan faktor imigrasi terinfeksi. Analisis matematis yang dilakukan meliputi penentuan titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik, perhitungan bilangan reproduksi dasar menggunakan metode *Direct Method*, serta analisis kestabilan dengan memanfaatkan matriks Jacobian dan kriteria Routh–Hurwitz. Berdasarkan hasil analisis, diperoleh titik equilibrium bebas penyakit (E^0), bilangan reproduksi dasar (R_0), dan titik equilibrium endemik (E^*). Analisis stabilitas menunjukkan bahwa jika $R_0 < 1$, titik ekuilibrium bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal, yang mengindikasikan bahwa secara biologis penyakit tidak akan menyebar secara luas dan pada akhirnya akan menghilang dari populasi. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$, titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal, yang berarti infeksi akan terus bertahan dan menyebar dalam populasi hingga menjadi endemik.

Kata Kunci: Model SIRS, Nonlinear Incidence Rate, Imigrasi Terinfeksi, COVID-19.

ABSTRACT

COVID-19 is a rapidly spreading disease driven by high human mobility, intense social interactions, and the emergence of new variants that enable reinfection. Classical SIR models generally assume permanent immunity, utilize a linear transmission rate, and do not account for individual immigration, making them inadequate for representing waning immunity, changes in community behavior, and more complex disease transmission dynamics. Therefore, this study extends the SIR model with a nonlinear incidence rate into an SIRS model with a nonlinear incidence rate, incorporating an infected immigration factor. The mathematical analysis includes determining the disease-free and endemic equilibrium points, calculating the basic reproduction number using the Direct Method, and conducting stability analysis through the Jacobian matrix and the Routh–Hurwitz criterion. The analysis yields the disease-free equilibrium point (E^0), the basic reproduction number (R_0), and the endemic equilibrium point (E^). Stability analysis shows that when $R_0 < 1$, the disease-free equilibrium is locally asymptotically stable, indicating that the disease will not spread widely and will eventually disappear from the population. Conversely, when $R_0 > 1$, the endemic equilibrium is locally asymptotically stable, implying that the infection will persist and continue to spread within the population, eventually becoming endemic.*

Keywords: SIRS model, nonlinear incidence rate, infected immigration, COVID-19.

1. PENDAHULUAN

Pandemi COVID-19 bukan sekadar krisis kesehatan, melainkan peristiwa global yang memengaruhi hampir seluruh aspek kehidupan manusia, mulai dari sistem kesehatan, pendidikan, ekonomi, hingga aktivitas sosial sehari-hari (Kissler et al., 2020). Virus ini menyebar sangat cepat karena tingginya pergerakan manusia, banyaknya interaksi sosial, serta munculnya varian baru yang bisa menginfeksi kembali orang yang sudah sembuh (Giordano et al., 2020; Sheehan et al., 2021). Kondisi tersebut membuat pola penyebaran COVID-19 menjadi tidak sederhana dan terus berubah dari waktu ke waktu. Karena polanya yang rumit dan dinamis mengikuti perilaku masyarakat, dibutuhkan alat analisis yang terukur dan sistematis untuk memetakan penyebaran ini secara lebih jelas. Salah satu metode yang paling efektif dan banyak digunakan adalah model matematika (Nesteruk, 2025).

Dalam epidemiologi, model matematika telah lama digunakan untuk menggambarkan penyebaran penyakit menular dan membantu memprediksi jumlah kasus di masa depan. Salah satu model yang paling mendasar adalah model SIR, yang membagi populasi menjadi tiga kelompok: orang yang sehat (rentan), orang yang sakit (terinfeksi), dan orang yang sembuh (Din et al., 2020). Model ini sederhana dan mudah dipahami sehingga sering dijadikan dasar dalam berbagai penelitian. Namun, model SIR klasik memiliki asumsi bahwa individu yang sembuh akan kebal selamanya dan tidak dapat terinfeksi kembali. Padahal, pada kasus COVID-19, kekebalan tubuh bisa menurun seiring waktu sehingga seseorang tetap memiliki kemungkinan untuk terinfeksi ulang (Owen, 2025; Pramudito & Prawoto, 2021). Fakta ini menunjukkan bahwa asumsi kekebalan permanen kurang sesuai dengan kondisi nyata di lapangan. Oleh karena itu, untuk menggambarkan COVID-19 secara lebih realistis dan mendekati kenyataan, model harus mempertimbangkan kemungkinan adanya infeksi ulang.

Selain masalah kekebalan, cara menghitung kecepatan penularan juga sangat penting dalam menentukan ketepatan model. Awalnya, banyak penelitian menggunakan laju penularan konstan atau linear karena lebih sederhana dan mudah dianalisis (Chen & Li, 2022), di mana jumlah kontak antara individu rentan dan terinfeksi dianggap berbanding lurus secara langsung. Namun, laju linear ini sulit menangkap perubahan perilaku masyarakat selama pandemi, seperti meningkatnya kewaspadaan, penggunaan masker, dan penerapan pembatasan sosial. Penularan bisa melambat saat masyarakat lebih disiplin dan waspada, tetapi dapat meningkat kembali saat masyarakat mulai lengah. Dinamika perilaku inilah yang membuat model dengan laju linear kurang mampu menggambarkan penyebaran COVID-19 secara menyeluruh dan realistis.

Sebagai solusi, dikembangkanlah konsep laju penularan nonlinear yang lebih fleksibel terhadap kondisi populasi dan tingkat interaksi sosial (Chawla et al., 2024; Malik & Althobaiti, 2025). Berbeda dengan pendekatan linear, pendekatan nonlinear memperhitungkan adanya efek penghambatan ketika jumlah kasus tinggi atau ketika intervensi diterapkan, sehingga model menjadi lebih adaptif terhadap situasi nyata. Dengan pendekatan ini, dampak tindakan pencegahan seperti pembatasan aktivitas dan meningkatnya kesadaran masyarakat dapat tergambar lebih jelas dalam menekan jumlah infeksi. Fayeldi & Dinnullah (2021) membuktikan bahwa model SIR nonlinear dengan efek penghambat dari kebijakan memberikan proyeksi yang lebih akurat dibandingkan model linear biasa. Hal ini semakin penting terutama dalam memprediksi kondisi endemik ketika faktor kematian akibat penyakit turut diperhitungkan dalam model (Suryani & Kurniyawati, 2025). Meski demikian, model tersebut belum

memasukkan kemungkinan infeksi ulang, sehingga belum sepenuhnya mewakili dinamika COVID-19 yang sebenarnya.

Di sisi lain, model SIRS dikembangkan untuk menggambarkan penyakit dengan kekebalan yang dapat menurun, sehingga individu yang sembuh dapat kembali menjadi rentan (Cai et al., 2017; Chang et al., 2017). Oleh karena itu, model SIRS dinilai lebih tepat digunakan untuk penyakit yang memungkinkan terjadinya infeksi ulang, termasuk COVID-19. Adanya kasus reinfeksi yang telah terkonfirmasi mendorong banyak peneliti untuk memodifikasi model SIR menjadi bentuk seperti SIRS atau SEIRS agar dinamika penyebaran penyakit dapat dijelaskan dengan lebih realistis (Asmaidi et al., 2023; Owen, 2025). Namun, model yang dikembangkan tersebut masih menggunakan laju penularan linear. Akibatnya, interaksi sosial yang kompleks, perubahan risiko akibat kepadatan populasi, serta respons masyarakat terhadap lonjakan kasus belum tergambar secara optimal dalam perhitungan tersebut.

Keterbatasan lain dalam model klasik adalah asumsi populasi tertutup, yaitu tidak adanya perpindahan penduduk masuk dan keluar wilayah. Padahal, mobilitas antarwilayah merupakan ciri utama masyarakat modern, terutama di era globalisasi. Perjalanan antar kota maupun antar negara dapat membawa individu yang terinfeksi ke wilayah baru. Analisis menunjukkan bahwa migrasi dapat memicu lonjakan kasus baru di wilayah yang sebelumnya sudah terkendali (Soleh & Darlina, 2013). Di Indonesia, arus kepulangan pekerja migran terbukti meningkatkan eskalasi kasus secara signifikan pada periode tertentu (Kurniawan et al., 2021). Bahkan, masuknya individu terinfeksi melalui imigrasi dapat menggagalkan target bebas penyakit meskipun program vaksinasi telah dijalankan dengan baik (Pramudito & Prawoto, 2021). Hal ini menegaskan bahwa faktor imigrasi sangat berpengaruh terhadap dinamika penyebaran penyakit dan penting untuk dimasukkan dalam model agar prediksi jangka panjang menjadi lebih akurat.

Meskipun banyak model matematika telah dikembangkan untuk mempelajari penyebaran COVID-19, sebagian besar penelitian sebelumnya belum mempertimbangkan secara bersamaan faktor interaksi sosial yang kompleks, reinfeksi, dan mobilitas penduduk. Sebagai contoh, Ajbar et al., (2021) mengembangkan model COVID-19 yang memasukkan tingkat kesadaran masyarakat dan laju pemulihan nonlinier. Namun, model tersebut masih menggunakan laju penularan linear dan mengasumsikan bahwa individu yang telah sembuh memiliki kekebalan permanen, serta tidak mempertimbangkan adanya imigrasi penduduk terinfeksi. Sementara itu, Rohith & Devika, (2020) telah menggunakan laju penularan nonlinier dalam model SEIR untuk mengkaji efektivitas intervensi pemerintah, tetapi belum memasukkan faktor reinfeksi maupun imigrasi individu terinfeksi.

Berdasarkan telaah tersebut, terlihat bahwa belum banyak penelitian yang secara bersamaan mengintegrasikan tiga komponen penting, yaitu nonlinear incidence rate, reinfeksi dalam model SIRS, dan faktor imigrasi. Padahal, tingginya mobilitas penduduk antarwilayah dan munculnya varian baru menunjukkan bahwa reinfeksi dan perpindahan individu terinfeksi dapat memengaruhi dinamika penyebaran COVID-19. Oleh karena itu, penelitian ini dilakukan untuk mengisi kesenjangan tersebut dengan mengembangkan model yang menggabungkan tiga faktor penting secara sekaligus, yaitu laju penularan nonlinier, reinfeksi akibat menurunnya kekebalan, dan imigrasi individu terinfeksi. Penelitian ini bertujuan memodifikasi model SIR dasar dengan nonlinear incidence rate yang dikembangkan oleh Fayeldi & Dinnullah (2021)

menjadi model SIRS nonlinear incidence rate dengan faktor imigrasi pada penyebaran penyakit COVID-19.

Secara spesifik, modifikasi model dilakukan dengan menambahkan dua mekanisme pada model dasar. Pertama, ditambahkan parameter laju kehilangan imunitas (θ) untuk menggambarkan kondisi ketika individu yang telah sembuh dapat kehilangan kekebalannya dan kembali menjadi rentan terhadap infeksi. Mekanisme ini menyebabkan individu berpindah dari kompartemen sembuh (R) ke kompartemen rentan (S), sehingga model berubah dari SIR menjadi SIRS. Kedua, ditambahkan parameter laju imigrasi terinfeksi (δ) untuk menggambarkan masuknya individu yang terinfeksi dari luar wilayah ke dalam populasi yang diamati. Parameter ini mencerminkan pengaruh mobilitas penduduk antarwilayah yang dapat menambah jumlah kasus infeksi dalam suatu populasi. Dengan pendekatan yang lebih komprehensif dan realistis ini, model yang dihasilkan diharapkan mampu memotret dinamika COVID-19 secara lebih nyata, memberikan gambaran kestabilan sistem yang lebih tepat, serta menjadi panduan yang kuat bagi perumusan kebijakan pengendalian penyakit.

2. METODE

Penelitian ini mengembangkan model dasar SIR dengan *nonlinear incidence rate* yang disusun oleh Fayeldi dan Dinnullah (2021) menjadi model SIRS *nonlinear incidence rate* dan faktor imigrasi terinfeksi pada penyebaran penyakit COVID-19. Model dasar tersebut dijelaskan dalam sistem persamaan diferensial berikut.

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - \mu S - \frac{\beta}{(1+\gamma I^2)} SI \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{(1+\gamma I^2)} SI - (\mu + \vartheta) I \tag{2}$$

$$\frac{dR}{dt} = \vartheta I - \mu R \tag{3}$$

Notasi dan definisi setiap variabel serta parameter pada model SIR dasar tersebut dijelaskan secara rinci pada Tabel 1.

Tabel 1. Deskripsi Variabel dan Parameter Model SIR Dasar

Parameter	Keterangan
$S(t)$	Jumlah individu rentan pada saat t
$I(t)$	Jumlah individu terinfeksi pada saat t
$R(t)$	Jumlah individu yang sembuh pada saat t
$\frac{1}{1 + \gamma I^2}$	Faktor penghambat (PSBB, <i>social distancing</i> , vaksinasi, penggunaan masker)
α	Tingkat kelahiran
β	Tingkat penularan COVID-19
ϑ	Tingkat kesembuhan individu terinfeksi
μ	Tingkat kematian

Keunggulan utama dari model dasar ini adalah penggunaan laju penularan nonlinier (*nonlinear incidence rate*) pada persamaan kompartemen rentan dan terinfeksi, yaitu $\frac{\beta}{(1+\gamma I^2)} SI$. Pada model epidemi klasik, laju penularan umumnya diasumsikan berbanding lurus (linier)

dengan jumlah kasus. Namun, model ini dimodifikasi dengan menambahkan sebuah suku penghambat pada bagian penyebutnya, yaitu I^2 . Bentuk nonlinier ini membuat model menjadi jauh lebih realistis. Secara matematis, penambahan penyebut ini menggambarkan efek "penghambat" penularan ketika jumlah kasus positif melonjak tinggi. Hal ini sejalan dengan kondisi di dunia nyata, di mana lonjakan kasus akan memicu perubahan perilaku masyarakat seperti peningkatan kepatuhan PSBB, *social distancing*, vaksinasi, penggunaan masker yang secara otomatis akan menekan laju penyebaran penyakit agar tidak meledak tanpa batas.

Dalam penelitian ini, model tersebut kemudian dimodifikasi dengan empat asumsi tambahan sebagai berikut.

1. Individu yang telah sembuh tidak memiliki kekebalan permanen. Kekebalan tersebut dapat menurun seiring waktu sehingga individu dapat kembali ke kelompok rentan (Çenesiz & Guimarães, 2022), dinyatakan dengan parameter θ .
2. Terdapat mobilitas penduduk yang diasumsikan sebanding dengan jumlah individu terinfeksi aktif di dalam sistem (δI). Secara biologis, asumsi ini digunakan untuk menggambarkan bahwa jumlah individu terinfeksi yang masuk ke suatu wilayah bergantung pada tingkat penyebaran penyakit yang sedang terjadi. Secara matematis, pendekatan ini diperlukan agar ekuilibrium bebas penyakit ($I = 0$) tetap ada dan dapat dianalisis. Jika laju imigrasi terinfeksi dinyatakan sebagai konstanta yang tidak bergantung pada jumlah individu terinfeksi, maka sistem secara teoretis tidak dapat mencapai kondisi bebas penyakit karena selalu terdapat aliran individu terinfeksi yang masuk ke dalam sistem.
3. Dalam jangka panjang jika wabah tidak dapat diatasi, virus akan berstatus endemik dan menetap dalam populasi pada suatu tingkat kesetimbangan yang stabil, di mana penyebarannya diimbangi oleh laju pemulihan, hilangnya kekebalan, dan dinamika mobilitas penduduk.

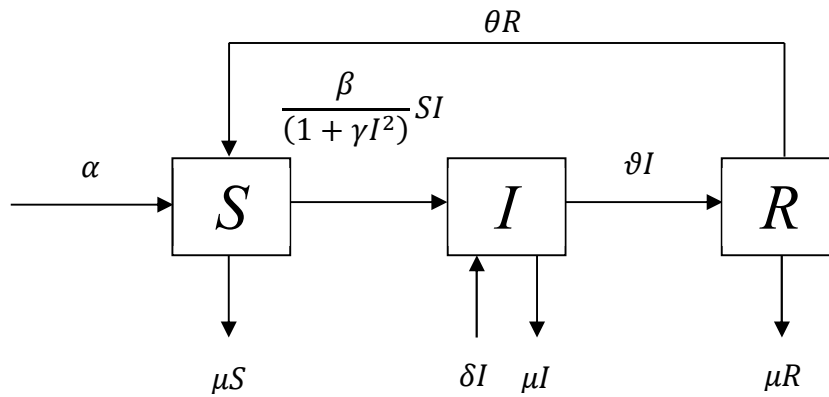
Berdasarkan asumsi yang telah dirumuskan, model Fayeldi dan Dinullah dimodifikasi menjadi model SIRS *Nonlinear Incidence Rate* dengan menambahkan parameter kehilangan imunitas (θ) dan faktor laju imigrasi individu terinfeksi (δ). Model termodifikasi tersebut dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial berikut.

$$\frac{dS}{dt} = \alpha + \theta R - \mu S - \frac{\beta}{(1+\gamma I^2)} SI, \tag{4}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{(1+\gamma I^2)} SI - (\mu + \vartheta - \delta)I, \tag{5}$$

$$\frac{dR}{dt} = \vartheta I - (\mu + \theta)R. \tag{6}$$

Interaksi antar kompartemen berdasarkan sistem persamaan diferensial di atas dapat divisualisasikan secara skematis. Alur perpindahan individu dari fase rentan, terinfeksi, hingga sembuh, serta faktor imigrasi yang masuk, ditunjukkan pada diagram alir pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Alir Model SIRS Nonlinear Incidence Rate dengan Faktor Imigrasi Terinfeksi

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini membahas analisis model matematika secara mendalam dan terstruktur. Langkah-langkah analisis yang dilakukan meliputi titik equilibrium bebas penyakit, bilangan reproduksi dasar, hingga titik equilibrium endemik. Selain itu, tingkat kestabilan dari model juga akan diuji. Penjelasan disusun melalui penjabaran yang detail dan bertahap agar alur perhitungannya mudah diikuti dan dipahami oleh pembaca.

3.1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit (*Disease-Free Equilibrium*)

Titik ekuilibrium (titik kesetimbangan) adalah titik yang memenuhi persamaan turunan bernilai nol, yaitu

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0. \tag{7}$$

Titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) menyatakan kondisi ketika tidak ada individu terinfeksi dalam populasi, sehingga diasumsikan

$$I = 0. \tag{8}$$

Untuk titik ekuilibrium bebas penyakit, dimisalkan $S = S^0, I = I^0, R = R^0$.

Dengan menyubstitusikan persamaan (7) dan (8) ke persamaan (6), diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \vartheta I - (\mu + \theta)R, \\ 0 &= \vartheta(0) - (\mu + \theta)R, \\ R &= 0 = R^0. \end{aligned} \tag{9}$$

Selanjutnya, substitusi persamaan (7), (8), dan (9) ke persamaan (4) menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \alpha + \theta R - \mu S - \frac{\beta}{(1+\gamma I^2)} SI \\ 0 &= \alpha + \theta(0) - \mu S - \frac{\beta}{(1+\gamma I^2)} S(0) \\ S &= \frac{\alpha}{\mu} = S^0. \end{aligned} \tag{10}$$

Dengan demikian, diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut.

$$E^0 = (S^0, I^0, R^0) = \left(\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0\right) \tag{11}$$

3.2. Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*)

Bilangan reproduksi dasar (R_0) dapat dihitung dengan pendekatan langsung (Direct Method) dari persamaan kompartemen terinfeksi tanpa menggunakan metode *Next Generation Matrix* (NGM) karena pada model hanya memiliki satu kompartemen infeksi, yaitu I (Van Den Driessche & Watmough, 2002). Bilangan reproduksi dasar diperoleh dengan mengalikan laju infeksi baru di populasi rentan dengan rata-rata durasi infeksi.

Dari persamaan (5), pada titik bebas penyakit berlaku persamaan (7) dan (10), laju infeksi baru di populasi rentan adalah βS , sedangkan laju keluarnya individu dari kompartemen infeksi adalah $(\mu + \vartheta - \delta)$, dengan $\frac{1}{\mu + \vartheta - \delta}$, merupakan rata-rata durasi infeksi. Agar ekspresi rata-rata durasi infeksi ini memiliki makna biologis yang valid (bernilai positif dan tidak tak hingga), maka harus dipenuhi syarat mutlak $\mu + \vartheta > \delta$. Syarat ini mengindikasikan bahwa laju gabungan antara kematian alami dan kesembuhan harus lebih besar daripada laju masuknya individu terinfeksi baru dari luar sistem. Dengan memenuhi syarat tersebut, perhitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) dapat diperjelas melalui perkalian laju infeksi baru dengan rata-rata durasi infeksi sebagai berikut.

$$R_0 = (\beta S) \left(\frac{1}{\mu + \vartheta - \delta} \right) = \frac{\beta S}{(\mu + \vartheta - \delta)}$$

Selanjutnya, dengan menyubstitusikan nilai populasi rentan pada titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu $S = \frac{\alpha}{\mu}$ diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta \left(\frac{\alpha}{\mu} \right)}{\mu + \vartheta - \delta} = \frac{\alpha \beta}{\mu(\mu + \vartheta - \delta)}. \tag{12}$$

Bilangan reproduksi dasar (R_0) menyatakan rata-rata banyak individu rentan yang tertular akibat kontak dengan satu individu terinfeksi ketika populasi berada pada kondisi bebas penyakit. Terdapat dua kondisi penyebaran atau peningkatan penyakit berdasarkan nilai R_0 . Jika $R_0 < 1$, maka Penyakit tidak menyebar secara luas dan pada akhirnya akan menghilang dari populasi. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$, maka infeksi dapat menyebar dan berpotensi menjadi endemik atau epidemi. Faktor imigrasi terinfeksi (δ) yang ada pada penyebut menunjukkan bahwa peningkatan laju individu terinfeksi yang masuk akan memperkecil nilai penyebut, sehingga akan memperbesar nilai R_0 secara nonlinier. Hal ini menunjukkan bahwa imigrasi terinfeksi akan mendorong penyebaran dan menggeser sistem menuju kondisi endemik.

3.3. Titik Ekuilibrium Endemik (*Endemic Equilibrium*)

Titik ekuilibrium endemik (E^*) menyatakan endemik kondisi di mana terdapat individu yang terinfeksi dalam populasi, sehingga diasumsikan

$$I > 0. \tag{13}$$

Mirip dengan titik ekuilibrium bebas penyakit, titik ekuilibrium endemik dapat dicapai dari persamaan (7). Untuk titik ekuilibrium, dimisalkan $S = S^*, I = I^*, R = R^*$.

Dari persamaan (5), pada kondisi setimbang, diperoleh

$$\frac{\beta}{(1+\gamma I^2)} S I = (\mu + \vartheta - \delta) I, \tag{14}$$

Karena persamaan (13), maka persamaan (5) dibagi dengan I , sehingga

$$\frac{\beta}{(1+\gamma I^2)} S = (\mu + \vartheta - \delta),$$

yang memberikan

$$\beta S = (\mu + \vartheta - \delta)(1 + \gamma I^2), \tag{15}$$

$$S = \frac{(\mu + \vartheta - \delta)(1 + \gamma I^2)}{\beta} = S^*. \tag{16}$$

Selanjutnya, dari persamaan (6) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \vartheta I - (\mu + \theta)R, \\ 0 &= \vartheta I - (\mu + \theta)R, \\ R &= \frac{\vartheta I}{\mu + \theta} = R^*. \end{aligned} \tag{17}$$

Kemudian, substitusi persamaan (7), (16), dan (17) ke persamaan (4)

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \alpha + \theta R - \mu S - \frac{\beta}{(1 + \gamma I^2)} SI, \\ 0 &= \alpha + \theta \left(\frac{\vartheta I}{\mu + \theta} \right) - \mu \left(\frac{(\mu + \vartheta - \delta)(1 + \gamma I^2)}{\beta} \right) - (\mu + \vartheta - \delta)I, \\ 0 &= \alpha + \theta \left(\frac{\vartheta I}{\mu + \theta} \right) - \mu \left(\frac{\mu + \vartheta - \delta}{\beta} \right) - \mu \gamma \left(\frac{1 + \gamma I^2}{\beta} \right) - (\mu + \vartheta - \delta)I. \end{aligned}$$

yang dapat disederhanakan menjadi persamaan kuadrat dalam I

$$aI^{*2} + bI^* + c = 0, \tag{18}$$

dengan koefisien

$$a = -\mu \gamma \left(\frac{\mu + \vartheta - \delta}{\beta} \right), b = \left(\frac{\theta \vartheta}{\mu + \theta} - (\mu + \vartheta - \delta) \right), c = \alpha - \mu \left(\frac{\mu + \vartheta - \delta}{\beta} \right).$$

Berdasarkan teorema persamaan kuadrat, solusi untuk I^* diberikan oleh

$$I = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = I^*.$$

Dengan demikian, titik kesetimbangan endemik dinyatakan sebagai

$$E^* = (S^*, I^*, R^*) = \left(\frac{(\mu + \vartheta - \delta)(1 + \gamma I^2)}{\beta}, \frac{-\left(\frac{\theta \vartheta}{\mu + \theta} - (\mu + \vartheta - \delta)\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\theta \vartheta}{\mu + \theta} - (\mu + \vartheta - \delta)\right)^2 - 4\left(-\mu \gamma \left(\frac{\mu + \vartheta - \delta}{\beta}\right)\right)\left(\alpha - \mu \left(\frac{\mu + \vartheta - \delta}{\beta}\right)\right)}}{2\left(-\mu \gamma \left(\frac{\mu + \vartheta - \delta}{\beta}\right)\right)}, \frac{\vartheta I}{\mu + \theta} \right). \tag{19}$$

3.4. Analisis Kesetabilan

Kestabilan titik ekuilibrium dapat diperiksa dengan linearisasi sistem nonlinear di sekitar titik ekuilibrium, yaitu dengan menyusun matriks Jacobian dan menganalisis nilai eigennya. Berdasarkan sistem pada model yang dimodifikasi, fungsi sistem dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} f_1(S, I, R) &= \alpha + \theta R - \mu S - \frac{\beta}{(1 + \gamma I^2)} SI, \\ f_2(S, I, R) &= \frac{\beta}{(1 + \gamma I^2)} SI - (\mu + \vartheta - \delta)I, \\ f_3(S, I, R) &= \vartheta I - (\mu + \theta)R. \end{aligned}$$

Matriks Jacobian didefinisikan sebagai

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Turunan parsial terhadap S

$$\frac{\partial f_1}{\partial S} = -\mu - \frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)}, \frac{\partial f_2}{\partial S} = \frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)}, \frac{\partial f_3}{\partial S} = 0.$$

Turunan parsial terhadap I

Untuk fungsi nonlinear digunakan turunan

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{I}{1+\gamma I^2} \right) = \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2},$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{\partial f_1}{\partial I} = -\beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2}, \frac{\partial f_2}{\partial I} = \beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} - (\mu + \vartheta - \delta), \frac{\partial f_3}{\partial I} = \vartheta.$$

Turunan parsial terhadap R

$$\frac{\partial f_1}{\partial R} = \theta, \frac{\partial f_2}{\partial R} = 0, \frac{\partial f_3}{\partial R} = (\mu + \theta).$$

Dengan demikian, matriks Jacobian umum sistem adalah

$$J(S, I, R) = \begin{bmatrix} -\mu - \frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)} & -\beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} & \theta \\ \frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)} & \beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} - (\mu + \vartheta - \delta) & 0 \\ 0 & \vartheta & -(\mu + \theta) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Teorema 1. Titik ekuilibrium bebas penyakit (E^0) stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$.

Bukti:

Pada titik ekuilibrium bebas penyakit (E^0), matriks Jacobian (21) menjadi

$$J(E^0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta \alpha}{\mu} & \theta \\ 0 & \frac{\beta \alpha}{\mu} - (\mu + \vartheta - \delta) & 0 \\ 0 & \vartheta & -(\mu + \theta) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Nilai eigen matriks Jacobian di titik ekuilibrium bebas penyakit diperoleh dengan menggunakan persamaan karakteristik berikut.

$$\det(J(E^0) - \lambda I) = 0,$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta \alpha}{\mu} & \theta \\ 0 & \frac{\beta \alpha}{\mu} - (\mu + \vartheta - \delta) & 0 \\ 0 & \vartheta & -(\mu + \theta) \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0,$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta \alpha}{\mu} & \theta \\ 0 & \frac{\beta \alpha}{\mu} - (\mu + \vartheta - \delta) & 0 \\ 0 & \vartheta & -(\mu + \theta) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -\frac{\beta\alpha}{\mu} & \theta \\ 0 & \frac{\beta\alpha}{\mu} - (\mu + \vartheta - \delta) - \lambda & 0 \\ 0 & \vartheta & -(\mu + \theta) - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-\mu - \lambda) \left(\frac{\beta\alpha}{\mu} - (\mu + \vartheta - \delta) - \lambda \right) (-(\mu + \theta) - \lambda) = 0.$$

Akar-akar dari persamaan tersebut memberikan tiga nilai eigen secara langsung

$$\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = \frac{\beta\alpha}{\mu} - (\mu + \vartheta - \delta), \lambda_3 = -(\mu + \theta).$$

Dapat dilihat bahwa nilai eigen $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$. Agar $\lambda_2 < 0$, oleh karena itu

$$\begin{aligned} \frac{\beta\alpha}{\mu} - (\mu + \vartheta - \delta) &< 0, \\ \frac{\beta\alpha}{\mu} &< (\mu + \vartheta - \delta), \\ \frac{\beta\alpha}{\mu(\mu + \vartheta - \delta)} &< 1, \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (12), maka

$$R_0 < 1.$$

Jadi, jika $R_0 < 1$, maka semua nilai eigen matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit akan negatif, sehingga titik ekuilibrium bebas penyakit stabil secara asimtot lokal. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$, maka ada nilai eigen matriks Jacobian positif, sehingga titik ekuilibrium bebas penyakit tidak stabil, dan titik ekuilibrium akan muncul. ■

Teorema 2. Titik ekuilibrium endemik (E^*) stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.

Bukti:

Pada titik ekuilibrium endemik (E^*), matriks Jacobian (21) menjadi

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\mu - \frac{\beta I}{(1+\gamma I^{*2})} & -\beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} & \theta \\ \frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)} & \beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} - (\mu + \vartheta - \delta) & 0 \\ 0 & \vartheta & -(\mu + \theta) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Persamaan karakteristik diperoleh dari

$$\begin{aligned} \det(J(E^*) - \lambda I) &= 0, \\ \det \left(\begin{bmatrix} -\mu - \frac{\beta I}{(1+\gamma I^{*2})} & -\beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} & \theta \\ \frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)} & \beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} - (\mu + \vartheta - \delta) & 0 \\ 0 & \vartheta & -(\mu + \theta) \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= 0, \\ \det \left(\begin{bmatrix} -\mu - \frac{\beta I}{(1+\gamma I^{*2})} & -\beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} & \theta \\ \frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)} & \beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} - (\mu + \vartheta - \delta) & 0 \\ 0 & \vartheta & -(\mu + \theta) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} -\mu - \frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)} - \lambda & -\beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} & \theta \\ \frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)} & \beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} - (\mu + \vartheta - \delta) - \lambda & 0 \\ 0 & \vartheta & -(\mu + \theta) - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

Misalkan $A = -\mu - \frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)}$, $B = \beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} - (\mu + \vartheta - \delta)$, $C = -(\mu + \theta)$,

$K_1 = -\beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2}$, $K_2 = \frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)}$, maka

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & K_1 & \theta \\ K_2 & B - \lambda & 0 \\ 0 & \vartheta & C - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(A - \lambda) \begin{vmatrix} B - \lambda & 0 \\ \vartheta & C - \lambda \end{vmatrix} - K_1 \begin{vmatrix} K_2 & 0 \\ 0 & C - \lambda \end{vmatrix} + \theta \begin{vmatrix} K_2 & B - \lambda \\ 0 & \vartheta \end{vmatrix} = 0,$$

$$(A - \lambda)(B - \lambda)(C - \lambda) - K_1 K_2 (C - \lambda) + \theta \vartheta K_2 = 0.$$

Sebelum persamaan karakteristik dan kriteria Routh–Hurwitz dianalisis, terlebih dahulu perlu ditinjau sifat tanda dari parameter A , B , dan C . Berdasarkan definisinya, dapat langsung diketahui bahwa $(A < 0)$ dan $(C < 0)$, karena kedua parameter tersebut merupakan hasil penjumlahan parameter-parameter model yang bernilai positif dan kemudian diberi tanda negatif. Sementara itu, tanda dari parameter B tidak dapat ditentukan secara langsung sehingga memerlukan pembuktian lebih lanjut. Oleh karena itu, perlu ditunjukkan secara aljabar bahwa B selalu bernilai negatif atau $B < 0$. Berdasarkan definisinya, parameter B dapat dituliskan sebagai berikut.

$$B = \beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} - (\mu + \vartheta - \delta)$$

Dari kondisi setimbang endemik pada persamaan (14), diketahui bahwa $\frac{\beta S}{(1+\gamma I^2)} = (\mu + \vartheta - \delta)$.

Dengan menyubstitusikan hubungan tersebut ke dalam suku pertama persamaan B , maka diperoleh

$$B = (\mu + \vartheta - \delta) \left(\frac{(1-\gamma I^2)^2}{(1+\gamma I^2)^2} \right) - (\mu + \vartheta - \delta)$$

Jika konstanta $(\mu + \vartheta - \delta)$ difaktorkan, persamaan dapat disederhanakan menjadi

$$B = (\mu + \vartheta - \delta) \left(\frac{(1-\gamma I^2)^2 - (1+\gamma I^2)^2}{(1+\gamma I^2)^2} \right)$$

$$B = \frac{-2\gamma(I^2)(\mu + \vartheta - \delta)}{(1+\gamma I^2)^2}.$$

Karena seluruh parameter model $(\gamma, \mu, \vartheta, \delta)$ dan nilai kuadrat populasi $(I^2)^2$ bernilai positif, serta telah ditetapkan syarat $\mu + \vartheta > \delta$, maka ekspresi di atas secara mutlak membuktikan bahwa nilai $B < 0$.

Dengan terjaminnya nilai $A < 0$, $B < 0$, dan $C < 0$, maka persamaan karakteristik dari matriks $J(E^*)$ adalah

$$\lambda^3 + X\lambda^2 + Y\lambda + Z = 0,$$

dengan

$$X = -A - B - C$$

$$\begin{aligned}
 X &= -\left(-\left(\mu + \frac{\beta I}{1+\gamma I^2}\right)\right) - \left(\beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} - (\mu + \vartheta - \delta)\right) - (-\mu + \theta), \\
 X &= \left(\mu + \frac{\beta I}{1+\gamma I^2}\right) - \left(\beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} - (\mu + \vartheta - \delta)\right) + (\mu + \theta), \\
 X &= \mu + \frac{\beta I}{1+\gamma I^2} - \beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} + \frac{\beta S}{1+\gamma I^2} + \mu + \theta, \\
 X &= 2\mu + \theta + \frac{\beta I}{1+\gamma I^2} + \frac{\beta S(1+\gamma I^2) - \beta S(1-\gamma I^2)}{(1+\gamma I^2)^2}, \\
 X &= 2\mu + \theta + \frac{\beta I}{1+\gamma I^2} + \frac{2\gamma\beta SI^2}{(1+\gamma I^2)^2}
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 Y &= (AB - K_1K_2) + C(A + B) \\
 Y &= \left(\left[(-\mu - \frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)})\left(\beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} - (\mu + \vartheta - \delta)\right)\right] - \left[(-\beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2})\left(\frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)}\right)\right]\right) + \\
 &\quad (-\mu + \theta) \left[\left(-\mu - \frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)}\right) + \left(\beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} - (\mu + \vartheta - \delta)\right)\right], \\
 Y &= \left(\left[(-\mu - \frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)})\left(\beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} - \frac{\beta S}{(1+\gamma I^2)}\right)\right] + \left(\beta^2 SI \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^3}\right)\right) + (-\mu + \theta) \left[\left(-\mu - \frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)}\right) + \right. \\
 &\quad \left. \left(\beta S \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^2} - \frac{\beta S}{(1+\gamma I^2)}\right)\right], \\
 Y &= \left(\left[(-\mu - \frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)})\left(-\frac{2\gamma\beta SI^2}{(1+\gamma I^2)^2}\right) + \left(\beta^2 SI \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^3}\right)\right]\right) + (-\mu + \theta) \left[\left(-\mu - \frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)}\right) + \right. \\
 &\quad \left. \left(-\frac{2\gamma\beta SI^2}{(1+\gamma I^2)^2}\right)\right], \\
 Y &= \left(\left(\frac{2\mu\gamma\beta SI^2}{(1+\gamma I^2)^2}\right) + \left(\frac{2\gamma\beta^2 SI^3}{(1+\gamma I^2)^3}\right) + \left(\beta^2 SI \frac{1-\gamma I^2}{(1+\gamma I^2)^3}\right)\right) + (-\mu + \theta) \left[-\left(\mu + \frac{\beta I}{1+\gamma I^2} - \frac{2\gamma\beta SI^2}{(1+\gamma I^2)^2}\right)\right], \\
 Y &= \left(\left(\frac{2\mu\gamma\beta SI^2}{(1+\gamma I^2)^2}\right) + \left(\frac{2\gamma\beta^2 SI^3 + \beta^2 SI(1-\gamma I^2)}{(1+\gamma I^2)^3}\right)\right) + (\mu + \theta) \left(\mu + \frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)} + \frac{2\gamma\beta SI^2}{(1+\gamma I^2)^2}\right), \\
 Y &= \left(\left(\frac{2\mu\gamma\beta SI^2}{(1+\gamma I^2)^2}\right) + \left(\frac{2\gamma\beta^2 SI^3 + \beta^2 SI - \gamma\beta^2 SI^3}{(1+\gamma I^2)^3}\right)\right) + \left(\mu(\mu + \theta) + \frac{\beta I(\mu + \theta)}{(1+\gamma I^2)} + \frac{2\gamma\beta SI^2(\mu + \theta)}{(1+\gamma I^2)^2}\right), \\
 Y &= \left(\left(\frac{2\mu\gamma\beta SI^2}{(1+\gamma I^2)^2}\right) + \left(\frac{\gamma\beta^2 SI^3 + \beta^2 SI}{(1+\gamma I^2)^3}\right)\right) + \left(\mu(\mu + \theta) + \frac{\beta I(\mu + \theta)}{(1+\gamma I^2)} + \frac{2\gamma\beta SI^2(\mu + \theta)}{(1+\gamma I^2)^2}\right), \\
 Y &= \left(\left(\frac{2\mu\gamma\beta SI^2}{(1+\gamma I^2)^2}\right) + \left(\frac{\beta^2 SI(\gamma I^2 + 1)}{(1+\gamma I^2)^3}\right)\right) + \left(\mu(\mu + \theta) + \frac{\beta I(\mu + \theta)}{(1+\gamma I^2)} + \frac{2\gamma\beta SI^2(\mu + \theta)}{(1+\gamma I^2)^2}\right), \\
 Y &= \left(\frac{2\mu\gamma\beta SI^2}{(1+\gamma I^2)^2}\right) + \left(\frac{\beta^2 SI}{(1+\gamma I^2)^2}\right) + \left(\mu(\mu + \theta) + \frac{\beta I(\mu + \theta)}{(1+\gamma I^2)} + \frac{2\gamma\beta SI^2(\mu + \theta)}{(1+\gamma I^2)^2}\right).
 \end{aligned}$$

serta

$$\begin{aligned}
 Z &= -C(AB - K_1K_2) - \theta\vartheta K_2 \\
 Z &= -(-\mu + \theta) \left[\left(\frac{2\mu\gamma\beta SI^2}{(1+\gamma I^2)^2}\right) + \left(\frac{\beta^2 SI}{(1+\gamma I^2)^2}\right)\right] - \theta\vartheta \left(\frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)^2}\right) \\
 Z &= (\mu + \theta) \left(\frac{2\mu\gamma\beta SI^2}{(1+\gamma I^2)^2} + \frac{\beta^2 SI}{(1+\gamma I^2)^2}\right) - \theta\vartheta \left(\frac{\beta I}{(1+\gamma I^2)^2}\right) \\
 Z &= \frac{2\mu\gamma\beta SI^2(\mu + \theta)}{(1+\gamma I^2)^2} + \frac{\beta I}{1+\gamma I^2} \left(\frac{\beta S(\mu + \theta)}{1+\gamma I^2} - \theta\vartheta\right) \\
 Z &= \frac{2\mu\gamma\beta SI^2(\mu + \theta)}{(1+\gamma I^2)^2} + \frac{\beta I}{1+\gamma I^2} \left(\frac{(\alpha - \mu S)(\mu + \theta)}{I}\right) \\
 Z &= \frac{2\mu\gamma\beta SI^2(\mu + \theta)}{(1+\gamma I^2)^2} + \left(\frac{\beta(\alpha - \mu S)(\mu + \theta)}{1+\gamma I^2}\right).
 \end{aligned}$$

Dari persamaan karakteristik tersebut dapat dilihat bahwa seluruh polinomial karakteristik adalah positif, yaitu

$$X = \left(2\mu + \theta + \frac{\beta I}{1+\gamma I^2} + \frac{2\gamma\beta SI^2}{(1+\gamma I^2)^2}\right) > 0,$$

$$Y = \left[\left(\frac{2\mu\gamma\beta SI^2}{(1+\gamma I^2)^2}\right) + \left(\frac{\beta^2 SI}{(1+\gamma I^2)^2}\right) + \left(\mu(\mu + \theta) + \frac{\beta I(\mu+\theta)}{(1+\gamma I^2)} + \frac{2\gamma\beta SI^2(\mu+\theta)}{(1+\gamma I^2)^2}\right)\right] > 0,$$

$$Z = \left[\frac{2\mu\gamma\beta SI^2(\mu+\theta)}{(1+\gamma I^2)^2} + \frac{\beta I}{1+\gamma I^2} \left(\frac{(\alpha-\mu S)(\mu+\theta)}{I}\right)\right] > 0.$$

Berdasarkan Kriteria Routh-Hurwitz, titik ekuilibrium endemik akan stabil secara asimtotik lokal jika dan hanya jika seluruh koefisien bernilai positif ($X > 0, Y > 0, Z > 0$) dan memenuhi syarat mutlak $XY - Z > 0$ (Ndi, 2022).

Bukti $XY - Z > 0$ adalah sebagai berikut.

Berdasarkan bentuk X, Y dan Z yang telah diperoleh sebelumnya, nilai $XY - Z$ dapat dituliskan sebagai

$$XY - Z = [(-A - B - C)((AB - K_1K_2) + C(A + B))] - [-C(AB - K_1K_2) - \theta\vartheta K_2]$$

$$XY - Z = [-(A + B)(AB - K_1K_2) - C(A + B)^2 - C(AB + K_1K_2) - C^2(A + B)] - [-C(AB - K_1K_2) - \theta\vartheta K_2]$$

$$XY - Z = -(A + B)(AB - K_1K_2) - C(A + B)^2 - C^2(A + B) + \theta\vartheta K_2$$

Untuk membuktikan ekspresi di atas selalu lebih besar dari nol ($XY - Z > 0$), kita lakukan analisis tanda aljabar per suku berdasarkan sifat-sifat komponennya.

Suku Pertama: $-(A + B)(AB - K_1K_2)$

Telah diketahui nilai $A < 0$ dan telah dibuktikan diatas bahwa $B < 0$. Maka, $(A + B) < 0$, yang berarti $(A + B) > 0$.

Suku determinan bagian $(AB - K_1K_2)$ setelah dijabarkan bernilai $\frac{2\mu\gamma\beta SI^2}{(1+\gamma I^2)^2} + \frac{\beta^2 SI}{(1+\gamma I^2)^2} > 0$.

Maka, hasil kali keduanya: $-(A + B)(AB - K_1K_2) > 0$.

Suku Kedua: $-C(A + B)^2$

Nilai $C = -(\mu + \theta) < 0$, sehingga nilai $-C > 0$.

Suku kuadrat $(A + B)^2$ pasti bernilai positif (> 0).

Maka, $-C(A + B)^2 > 0$.

Suku Ketiga: $-C^2(A + B)$

Nilai $-C^2$, pasti bernilai negatif (< 0).

Nilai $(A + B)$ bernilai negatif (< 0).

Perkalian dua bilangan negatif menghasilkan nilai positif, sehingga $-C^2(A + B) > 0$.

Suku Keempat: $\theta\vartheta K_2$

Seluruh parameter θ, ϑ dan koefisien $K_2 = \frac{\beta I}{1+\gamma I^2}$ bernilai positif (> 0).

Maka, $\theta\vartheta K_2 > 0$.

Karena keempat suku pembentuk persamaan $XY - Z$ terbukti secara aljabar masing-masing bernilai positif, maka penjumlahan totalnya mutlak menghasilkan nilai yang lebih besar dari nol.

Jika $R_0 > 1$, maka seluruh koefisien polinomial karakteristik adalah positif ($X > 0, Y > 0, Z > 0$). Selain itu juga terpenuhi syarat kriteria kestabilan Routh-Hurwitz $XY - Z > 0$. Hal ini secara mutlak menunjukkan bahwa seluruh nilai eigen memiliki bagian riil yang negatif, sehingga titik ekuilibrium endemik akan stabil secara asimtotik lokal. ■

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis matematis, Model yang dikembangkan mampu merepresentasikan beberapa karakteristik penting dalam penyebaran penyakit, yaitu, perubahan laju penularan nonlinier, menurunnya imunitas, serta faktor imigrasi. Analisis terhadap sistem persamaan diferensial, diperoleh titik equilibrium bebas penyakit, bilangan reproduksi dasar, dan titik equilibrium endemik. Analisis stabilitas menunjukkan bahwa jika $R_0 < 1$, titik equilibrium bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal, yang mengindikasikan bahwa secara biologis penyakit tidak akan menyebar secara luas dan pada akhirnya akan menghilang dari populasi. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$, titik equilibrium endemik stabil asimtotik lokal, yang berarti infeksi akan terus bertahan dan menyebar dalam populasi hingga menjadi endemik.

Sebagai saran, penelitian selanjutnya diharapkan dapat melakukan simulasi numerik berdasarkan model yang telah dikembangkan sehingga dinamika penyebaran penyakit dapat divisualisasikan dengan lebih jelas dan mendukung hasil analisis matematis yang diperoleh. Selain itu, model ini juga dapat dikembangkan lebih lanjut dengan menambahkan kompartemen lain yang lebih relevan dengan kondisi epidemiologi di lapangan, seperti kompartemen masa inkubasi (*Exposed*) maupun karantina (*Quarantined*). Penambahan kompartemen tersebut diharapkan mampu memberikan gambaran yang lebih komprehensif mengenai dinamika penyebaran penyakit.

5. DAFTAR PUSTAKA

- Ajbar, A., Alqahtani, R. T., & Boumaza, M. (2021). Dynamics of an SIR-Based COVID-19 Model With Linear Incidence Rate, Nonlinear Removal Rate, and Public Awareness. *Frontiers in Physics*, 9(634251), 1–13. <https://doi.org/10.3389/fphy.2021.634251>
- Asmaidi, Mulyadi, T. K., Putri, D. F., & Tumilaar, R. (2023). SEIRS Type Mathematical Model Simulation (COVID19 Case). *Jurnal Inovasi Teknologi dan Rekayasa*, 8(2), 359–366. <https://doi.org/10.31572/inotera.Vol8.Iss2.2023.ID271>
- Cai, Y., Kang, Y., & Wang, W. (2017). A Stochastic SIRS Epidemic Model with Nonlinear Incidence. *Applied Mathematics and Computation*, 305, 221–240. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.02.003>
- Çenesiz, M. A., & Guimarães, L. (2022). COVID-19: What if Immunity Wanes? *The Canadian journal of economics. Revue canadienne d'économique*, 55(Suppl 1), 626–664. <https://doi.org/10.1111/caje.12542>
- Chang, Z., Meng, X., & Lu, X. (2017). Analysis of a Novel Stochastic SIRS Epidemic Model with Two Different Saturated Incidence Rates. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 472, 103–116. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.01.015>
- Chawla, S. R., Ahmad, S., Khan, A., Albalawi, W., Sooppy, K., & Ali, H. M. (2024). Stability Analysis and Optimal Control of a Generalized SIR Epidemic Model with Harmonic

- Mean Type of Incidence and Nonlinear Recovery Rates. *Alexandria Engineering Journal*, 97(4), 44–60. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2024.04.017>
- Chen, T., & Li, Z. (2022). Dynamics and Stationary Distribution of a Stochastic SIRS Epidemic Model with a General Incidence and Immunity. *Bound Value Problms*, 2022(85), 1–22. <https://doi.org/10.1186/s13661-022-01668-0>
- Din, R. U., Shah, K., Ahmad, I., & Abdeljawad, T. (2020). Study of Transmission Dynamics of Novel COVID-19 by Using Mathematical Model. *Advances in Defference Equations*, 2020(323), 1–13. <https://doi.org/10.1186/s13662-020-02783-x>
- Fayeldi, T., & Dinnullah, R. N. I. (2021). Covid-19 SIR Model with Nonlinear Incidence Rate. *Journal of Physics: Conference Series*, 1869(012113), 1–5. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1869/1/012113>
- Giordano, G., Blanchini, F., Bruno, R., Colaneri, P., Filippo, A. Di, Matteo, A. Di, & Colaneri, M. (2020). Modelling the COVID-19 Epidemic and Implementation of Population-wide Interventions in Italy. In *Nature Medicine* (Vol. 26, Nomor June). <https://doi.org/10.1038/s41591-020-0883-7>
- Kissler, S. M., Tedijanto, C., Goldstein, E., Grad, Y. H., & Lipsitch, M. (2020). Projecting the Transmission Dynamics of SARS-CoV-2 Through The Postpandemic Period. *Science*, 368(6493), 860–868. <https://doi.org/10.1126/science.abb5793>
- Kurniawan, E. A. D., Fatmawati, & Dianpermatasari, A. (2021). Model Matematika SEAR dengan Memperhatikan Faktor Migrasi Terinfeksi untuk Kasus COVID-19 di Indonesia. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 18(2), 142–153. <https://doi.org/10.12962/limits.v18i2.7774>
- Malik, K., & Althobaiti, S. (2025). Impact of The Infected Population and Nonlinear Incidence Rate on The Dynamics of The SIR Model. *Adv Cont Discr Mod*, 2025(21), 1–17. <https://doi.org/10.1186/s13662-025-03897-w>
- Ndii, M. (2022). *Pemodelan Matematika*. PT. Nasya Expanding Management.
- Nesteruk, I. (2025). General SIR Model for Visible and Hidden Epidemic Dynamics. *Frontiers in Artificial Intelligence*, 8(1559880), 1–8. <https://doi.org/10.3389/frai.2025.1559880>
- Owen, L. (2025). Bogdanov-Takens Bifurcation in SIRI Model with Multiple Reinfection of COVID-19. *MJS: Malaysian Journal of Science*, 44(June), 52–62. <https://doi.org/10.22452/mjs.vol44no2.5>
- Pramudito, M. S. P., & Prawoto, B. P. (2021). Model SEIR Penyakit Covid-19 dengan Adanya Migrasi dan Pemberian Vaksin. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 09(02), 260–267. <https://doi.org/10.26740/mathnusa.v9n2.p260-276>
- Rohith, G., & Devika, K. B. (2020). Dynamics and Control of COVID-19 Pandemic with Nonlinear Incidence Rates. *Nonlinear Dynamics*, 101(3), 2013–2026. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05774-5>
- Sheehan, M. M., Reddy, A. J., & Rothberg, M. B. (2021). Reinfection Rates Among Patients Who Previously Tested Positive for Coronavirus Disease 2019 : A Retrospective Cohort Study. *Clinical Infectious Diseases*, 73(10), 1882–1886. <https://doi.org/10.1093/cid/ciab234>
- Soleh, M., & Darlina, L. (2013). Kestabilan Titik Equilibrium Model SIR (Susceptible, Infected, Recovered) Penyakit Fatal dengan Migrasi. *SiTekIn: Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, 11(1), 1–9. <https://doi.org/10.24014/sitekin.v11i1.552>

- Suryani, I., & Kurniyawati, F. (2025). Penerapan Model SIR dengan Nonlinier Incidence Rate pada Penyebaran Covid-19 di Provinsi Riau. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, *11*(1), 16–25. <https://doi.org/10.24014/jsms.v10i1.25846>
- Van Den Driessche, P., & Watmough, J. (2002). Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, *180*(1), 29–48. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6)