e-ISSN: 2714-5506
p-ISSN: 2714-609X

**SQUARE : Journal of Mathematics and Mathematics Education**
Volume 8, No. 2, 2026, pp. 137-148
http://dx.doi.org/10.21580/square.2026.8.2.34079

# *Weak X-Robustness* dalam *Max-Min Semiring*

Maulidina Mufarihana[1], Ayus Riana Isnawati[2*], Prihadi Kurniawan[3]
[1,2,3]Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Walisongo
[*]arianai@walisongo.ac.id

**ABSTRAK**

Konsep ketahanan (robustness) matriks dalam aljabar max-min merupakan salah satu kajian yang berkembang dari konsep ketahanan matriks pada aljabar konvensional. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji hubungan antara matriks $\boldsymbol{X}$-robust dan matriks weakly $\boldsymbol{X}$-robust pada max-min semiring, serta menentukan langkah-langkah dalam mengidentifikasi matriks berukuran $n \times n$ dengan elemen-elemennya berasal dari himpunan $[0,1]$ dapat dikatakan matriks weakly $\boldsymbol{X}$-robust. Metode yang digunakan adalah analisis matematis deduktif berbasis kajian pustaka, meliputi penyusunan dugaan, pembuktian atau pencarian contoh penyangkal, serta penurunan langkah-langkah dari definisi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa matriks **X**-robust dan matriks weakly **X**-robust tidak saling mengimplikasikan secara umum, dan status keduanya bergantung pada vektor interval **X**. Jika $\mathbf{X} \subseteq V(A)$, kedua sifat ekuivalen dan keduanya berlaku. Langkah-langkah penentuan matriks weakly **X**-robust terdiri atas penentuan $V(A)$, penentuan $\mathrm{attr}(A)$ melalui pembagian domain berdasarkan elemen matriks, dan pemeriksaan $\mathrm{attr}(A) \cap \mathbf{X} \subseteq V(A)$.

**Kata Kunci:** max-min semiring, vektor interval **X**, matriks **X**-robust, matriks weakly **X**-robust.

***ABSTRACT***

*The concept of matrix robustness in max-min algebra is one of the studies developed from the concept of matrix robustness in conventional algebra. This study aims to examine the relationship between X-robust matrices and weakly X-robust matrices over the max-min semiring, as well as to determine the steps in identifying whether an $n \times n$ matrix with elemenes from the set [0, 1] can be classified as a weakly X-robust matrix. The method is deductive mathematical analysis based on a literature study, consisting of formulating conjectures, proving them or constructing counterexamples, and deriving the steps from the definitions. The steps are illustrated on four $2 \times 2$ matrices. The results show that X-robust and weakly X-robust matrices do not imply each other in general, and that the status of a matrix depends on the interval vector $\boldsymbol{X}$. If $\boldsymbol{X} \subseteq V(A)$, the two properties are equivalent and both hold. The steps for identifying a weakly X-robust matrix consist of determining $V(A)$, determining $attr(A)$ by partitioning the domain according to the matrix elemenes, and verifying $attr(A) \cap \boldsymbol{X} \subseteq V(A)$.*

***Keywords:*** *max-min semiring, interval vector* $\boldsymbol{X}$*,* $\boldsymbol{X}$*-robust matrix, weakly* $\boldsymbol{X}$*-robust matrix.*

## 1. PENDAHULUAN

Tes Potensi Akademik (TPA) digunakan secara luas sebagai alat seleksi, baik untuk masuk perguruan tinggi jenjang sarjana dan pascasarjana, seleksi penerima beasiswa, maupun rekrutmen pegawai di instansi pemerintah dan swasta. Pada umumnya TPA terdiri atas tiga subtes, yaitu verbal, numerik, dan figural atau spasial (Sinta et al., 2022; S. R. Zahara et al., 2022). Subtes numerik menguji kemampuan seseorang dalam memecahkan masalah matematika dasar, mulai dari berhitung, mengenali pola bilangan, hingga menyelesaikan soal cerita. Skor TPA juga berkaitan dengan prestasi belajar matematika siswa (Nurulaini Jaafar et al., 2022; Susilo & Nur'aini, 2018), sehingga kemampuan pada subtes ini tidak hanya berguna untuk lolos seleksi, tetapi juga mencerminkan kesiapan akademik.

Aljabar max-min adalah penerapan struktur max-min semiring pada matriks dan vektor. Max-min semiring dibangun atas himpunan terurut linear terbatas dengan operasi $\oplus = \max$ dan $\otimes = \min$ yang bersifat idempoten (Golan, 1999; Plavka & Sergeev, 2016). Matriks atas aljabar *max-min* digunakan untuk memodelkan sistem dinamis diskret fuzzy, program logika fuzzy, teori graf, sistem fuzzy, serta penjadwalan dan optimasi (Molnárová dkk., 2013). Dalam pemodelan tersebut, keadaan sistem pada tahap ke-$r$ dinyatakan oleh vektor $x(r)$ dan berkembang menurut $x(r+1) = A \otimes x(r)$. Barisan $x(0), x(1), x(2), \ldots$ disebut orbit (Myšková, 2012b;Plavka & Sergeev, 2016). Orbit dalam aljabar *max-min* bersifat *ultimately periodic*, yaitu setelah sejumlah langkah tertentu orbit berulang dengan periode tertentu (Myšková, 2012b); (Myšková & Plavka, 2013). Jika periodenya satu, orbit mencapai vektor $x$ yang memenuhi $A \otimes x = x$, yang disebut titik tetap.

Analisis ketahanan (robustness) matriks atas aljabar max-min didasarkan pada tiga konsep, yaitu orbit, himpunan titik tetap $V(A)$, dan himpunan atraktor $\mathrm{attr}(A)$. Himpunan atraktor adalah himpunan vektor awal yang orbitnya mencapai $V(A)$ (Plavka, 2013;Plavka & Sergeev, 2016). Dengan demikian, robustness dalam aljabar max-min berkaitan dengan perilaku orbit terhadap pilihan vektor awal, yaitu apakah keadaan *steady state* sistem tercapai dari kondisi awal yang diberikan. Pengertian ini berbeda dengan analisis ketahanan dalam aljabar konvensional. Dalam aljabar konvensional, ketahanan matriks terhadap perubahan elemen dikaji melalui teori perturbasi, misalnya melalui batas perubahan nilai eigen dan nilai singular ketika matriks $A$ berubah menjadi $A + E$ (Zhou dkk., 2016). Teori perturbasi juga dikembangkan untuk sistem nonlinear, tetapi kerangkanya berdasarkan pada operasi penjumlahan dan perkalian biasa. Sementara itu, analisis dalam aljabar max-min menggunakan operasi maksimum dan minimum serta perilaku iterasi orbit.

Dalam praktiknya, kondisi awal sistem sering tidak diketahui secara eksak dan lebih wajar dinyatakan dalam batas bawah $\underline{x}$ dan batas atas $\overline{x}$. Himpunan kondisi awal tersebut dinyatakan sebagai vektor interval $\mathbf{X} = [\underline{x}, \overline{x}]$ (Myšková, 2012a). Berdasarkan konsep ini, (Myšková & Plavka, 2013) mendefinisikan matriks $\mathbf{X}$-robust, yaitu matriks yang orbitnya mencapai titik tetap dari setiap vektor awal di $\mathbf{X}$, atau $\mathbf{X} \subseteq \mathrm{attr}(A)$. Konsep lain yang berkaitan adalah *weak* $\boldsymbol{X}$*-robustness* yang dikaji oleh (Plavka & Sergeev, 2016). Matriks disebut *weakly* $\boldsymbol{X}$*-robust* apabila $\mathrm{attr}(A) \cap \mathbf{X} \subseteq V(A)$, yaitu setiap vektor di $\mathbf{X}$ yang orbitnya mencapai titik tetap sudah merupakan titik tetap sejak awal. Konsep *weak* $\mathbf{X}$*-robustness* penting karena memberikan informasi tentang hubungan kondisi awal dengan keadaan *steady-state* sistem. Jika

*A* bersifat *weakly* **X**-*robust*, setiap kondisi awal di **X** hanya memiliki dua kemungkinan, yaitu sudah merupakan titik tetap, atau orbitnya tidak pernah mencapai titik tetap (tidak stabil)**.**

Penelitian terdahulu telah memaparkan beberapa hasil. (Myšková,2012a) memperkenalkan vektor interval **X** dan himpunan vektor eigen dengan nilai eigen $\lambda = I_B$ (himpunan titik tetap) dalam aljabar fuzzy. (Myšková, 2012b) menguraikan definisi orbit, sifat *ultimately periodic*, dan orbit stabil, serta memberikan syarat perlu dan cukup kestabilan lemah orbit interval matriks sirkulan. (Plavka, 2013) mengkaji himpunan atraktor dan memberikan karakterisasi serta algoritma $O(n^2)$ untuk *weak robustness*, yaitu kasus $\mathbf{X} = B(n)$. Myšková & Plavka (2013) mendefinisikan **X**-*robustness*, membuktikan bentuk ekuivalen himpunan atraktor, dan memberikan algoritma polinomial untuk matriks sirkulan interval. (Plavka & Sergeev, 2016) mendefinisikan *weak* **X**-*robustness* dan memberikan karakterisasi kombinatorial bagi matriks dengan *X-simple image eigenspace*, yang terkait dengan *weak* **X**-*robustness*. Kajian berikutnya memperluas konsep-konsep tersebut ke matriks interval, misalnya *X-simplicity* matriks interval (Plavka & Berežný, 2018), *strong* **X**-*robustness* matriks interval (Myšková & Plavka, 2021), dan versi AE/EA dari **X**-*robustness* untuk matriks sirkulan interval (Myšková & Plavka, 2023). Secara umum, penelitian terdahulu mengkaji satu konsep *robustness* secara terpisah atau memperluasnya ke matriks interval. Keterkaitan antara **X**-*robustness* dan *weak* **X**-*robustness* untuk matriks dan vektor interval yang sama belum dianalisis secara eksplisit. Selain itu, (Plavka & Sergeev, 2016) memberikan definisi dan karakterisasi kombinatorial, tetapi belum menyajikan langkah-langkah praktis untuk memeriksa definisi tersebut pada matriks tertentu. Langkah praktis tersebut memerlukan penentuan $V(A)$ dan $\mathrm{attr}(A)$ secara eksplisit.

Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk: (1) menganalisis keterkaitan antara matriks **X**-*robust* dan matriks *weakly* **X**-*robust* dalam *max-min semiring*; dan (2) menyusun langkah-langkah untuk menentukan apakah matriks berukuran $n \times n$ dengan elemen dari $[0,1]$ bersifat *weakly* **X** -*robust*. Kontribusi penelitian ini adalah sebagai berikut: (i) contoh penyangkal yang menunjukkan bahwa kedua sifat tidak saling mengimplikasikan secara umum; (ii) Proposisi 3.1 tentang syarat tambahan $\mathbf{X} \subseteq V(A)$ yang membuat kedua sifat ekuivalen; (iii) langkah-langkah penentuan $\mathrm{attr}(A)$ melalui pembagian domain $[0,1]^2$ berdasarkan elemen matriks; dan (iv) empat contoh matriks $2 \times 2$ yang diturunkan secara lengkap, disertai analisis pengaruh pemilihan **X**. Definisi, lema, dan akibat yang berasal dari literatur diberi rujukan secara eksplisit. Proposisi 3.1, langkah-langkah penentuan, dan seluruh perhitungan contoh merupakan hasil analisis penulis.

## 2. METODE

Penelitian ini dilakukan dengan metode studi pustaka, yang dapat disebut juga penelitian kepustakaan. Bahan kajian berupa definisi dan hasil yang telah dipublikasikan, terutama dari (Myšková, 2012a, 2012b; Myšková & Plavka, 2013; Plavka, 2013), serta (Plavka & Sergeev, 2016).

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

### Landasan Teori

**Definisi 3.1** [Himpunan Terurut Linear Terbatas, (Plavka & Sergeev, 2016)]

Himpunan $(B, \leq)$ disebut himpunan terurut linear terbatas (*bounded linearly ordered set*) apabila $B$ merupakan himpunan terurut linear dan himpunan terbatas dengan elemen terkecil sebagai batas bawah, yaitu $O_{\mathrm{B}}$ serta elemen terbesar sebagai batas atas, yaitu $I_{\mathrm{B}}$, sehingga untuk setiap $x \in B$ berlaku $O_{\mathrm{B}} \leq x \leq I_{\mathrm{B}}$.

Himpunan terurut linear terbatas merupakan himpunan dasar dalam pembentukan struktur *max-min semiring*.

**Definisi 3.2 [**Semiring, (Muanalifah dkk., 2023)]

Himpunan tak kosong $S$ yang dilengkapi operasi biner $+$ dan $\times$. Struktur aljabar $(S, +, \times)$ disebut semiring apabila berlaku aksioma-aksioma berikut.

1. $(S, +)$ monoid komutatif dengan elemen identitas $0_S$.
   a. (Asosiatif)
      $\forall x, y, z \in S$ berlaku: $(x + y) + z = x + (y + z)$.
   b. (Memiliki Elemen Identitas)
      $\forall x \in S, \exists!\, 0_S \in S$ berlaku: $x + 0_S = x = 0_S + x$.
   c. (Komutatif)
      $\forall x, y \in S$ berlaku: $x + y = y + x$.
2. $(S, \times)$ monoid dengan elemen identitas $1_S$.
   a. (Asosiatif)
      $\forall x, y, z \in S$ berlaku: $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
   b. (Memiliki Elemen Identitas)
      $\forall x \in S, \exists!\, 1_S \in S$ berlaku: $x \times 1_S = x = 1_S \times x$.
3. Operasi biner $\times$ distributif terhadap operasi biner $+$.
   a. (Distributif Kiri)
      $\forall x, y, z \in S$ berlaku: $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$.
   b. (Distributif Kanan)
      $\forall x, y, z \in S$ berlaku: $(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$.
4. $0_S$ adalah elemen penyerap terhadap operasi biner $\times$.
   $\forall x \in S, \exists!\, 0_S \in S$ berlaku: $x \times 0_S = 0_S = x \times 0_S$.

**Definisi 3.3** [*Max-min semiring*, (Plavka & Sergeev, 2016)]. Misalkan $(B, \leq)$ himpunan terurut linear terbatas dengan elemen terkecil $O_B$ dan elemen terbesar $I_B$. Untuk $a, b \in B$ didefinisikan $a \oplus b = \max(a, b)$ dan $a \otimes b = \min(a, b)$. Struktur $(B, \oplus, \otimes)$ disebut *max-min semiring*, yaitu semiring dengan elemen nol $O_B$ dan elemen satuan $I_B$.

Operasi biner $\oplus$ = max dan $\otimes$ = min pada *max-min semiring* merupakan operasi biner yang idempoten, yaitu $a \oplus a = a$ dan $a \otimes a = a$, untuk setiap $a \in B$ (Plavka & Sergeev, 2016). Penerapan *max-min semiring* pada vektor dan matriks membentuk aljabar *max-min*. Dengan demikian, definisi matriks dan vektor atas aljabar *max-min* dijelaskan sebagai berikut.

**Definisi 3.4** [Matriks, vektor, dan operasi, (Plavka & Sergeev, 2016)]. Himpunan matriks berorde $n \times m$ dengan elemen di $B$ dinotasikan $B(n \times m)$, dan himpunan vektor berorde $n \times 1$ dinotasikan $B(n)$. Untuk $A = (a_{ij}) \in B(n \times n)$ dan $x \in B(n)$, berlaku

$$(A \otimes x)_i = \oplus_{j=1}^{n}(a_{ij} \otimes x_j) = \max_{1 \le j \le n} \min(a_{ij}, x_j), \qquad i = 1, \dots, n,$$

serta $A^1 = A$ dan $A^{k+1} = A \otimes A^k$. Untuk $x, y \in B(n)$, relasi urutan parsial didefinisikan per komponen: $x \le y$ jika dan hanya jika $x_i \le y_i$ untuk setiap $i$.

Karena operasinya idempoten, perhitungan $A \otimes x$ tidak pernah menghasilkan bilangan baru di luar elemen matriks dan komponen vektor (Plavka & Sergeev, 2016).

Sebagai contoh, untuk $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 1 & 0.6 \end{bmatrix}$ dan $x = (0.7, 0.9, 0.5)^T$, diperoleh

$$A \otimes x = \big(\max(0.7, 0.5, 0.3), \max(0.4, 0.9, 0.5)\big)^T = (0.7, 0.9)^T.$$

**Definisi 3.5** [Orbit, (Myšková, 2012b; Plavka & Sergeev, 2016)]. Orbit dari $x \in B(n)$ oleh $A \in B(n \times n)$ adalah barisan $O(A, x) = (x(r); r \in \mathbb{N}_0)$ dengan $x(0) = x$ dan $x(r+1) = A \otimes x(r)$, sehingga $x(r) = A^r \otimes x$. Orbit juga dapat dipandang sebagai himpunan $\{A^r \otimes x \mid r \in \mathbb{N}_0\}$ (Semančíková, 2007).

**Definisi 3.6** [*Ultimately periodic* dan orbit stabil, (Myšková, 2012b)]. Orbit $O(A, x)$ disebut *ultimately periodic* apabila terdapat bilangan asli $p$ dan $R$ sehingga $x(k+p) = x(k)$ untuk setiap $k \ge R$. Bilangan $p$ terkecil disebut periode, $\mathrm{per}(A, x)$, dan $R$ terkecil disebut *defect*. Orbit disebut stabil jika $\mathrm{per}(A, x) = 1$.

**Definisi 3.7** [Himpunan titik tetap, (Myšková, 2012a; Plavka & Sergeev, 2016)]. Himpunan titik tetap dari $A$ adalah $V(A) = \{x \in B(n) \mid A \otimes x = x\}$. Anggota $V(A)$ adalah vektor eigen $A$ dengan nilai eigen $\lambda = I_B$.

**Definisi 3.8** [Himpunan atraktor, (Plavka & Sergeev, 2016)]. Himpunan atraktor dari $A$ adalah

$$\mathrm{attr}(A) = \{x \in B(n) \mid O(A, x) \cap V(A) \neq \varnothing\}.$$

Jadi, $\mathrm{attr}(A)$ adalah himpunan vektor awal yang orbitnya mencapai (menyentuh) suatu titik tetap setelah berhingga langkah. Pengertian ini berbeda dengan konvergensi asimtotik $\lim_{r \to \infty} x(r)$ pada aljabar konvensional. Lema 3.1 menunjukkan bahwa dalam aljabar *max-min*, mencapai titik tetap setara dengan orbit yang stabil.

**Definisi 3.9** [Vektor interval, (Myšková, 2012a)]. Untuk $\underline{x}, \overline{x} \in B(n)$ dengan $\underline{x} \le \overline{x}$, vektor interval dengan batas bawah $\underline{x}$ dan batas atas $\overline{x}$ adalah

$$\mathbf{X} = [\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in B(n) \mid \underline{x} \le x \le \overline{x}\} = \{x \in B(n) \mid \underline{x}_i \le x_i \le \overline{x}_i,\ i = 1, \dots, n\}.$$

Vektor interval $\mathbf{X}$ merepresentasikan himpunan kondisi awal sistem, yaitu $x(0) \in \mathbf{X}$. Vektor ini bukan gangguan terhadap elemen matriks $A$.

**Definisi 3.10** [Matriks **X**-*robust*, (Myšková & Plavka, 2013)]. Matriks $A \in B(n \times n)$ disebut **X**-*robust* apabila $\mathbf{X} \subseteq \text{attr}(A)$.

**Definisi 3.11** [Matriks *weakly* **X**-*robust*, (Plavka & Sergeev, 2016)]. Matriks $A \in B(n \times n)$ disebut *weakly* **X**-*robust* apabila $\text{attr}(A) \cap \mathbf{X} \subseteq V(A)$.

Matriks *strongly* **X**-*robust* selalu **X**-*robust*. Matriks *weakly robust* selalu *weakly* **X**-*robust* untuk setiap **X**, karena *weak robustness* adalah kasus khusus $\mathbf{X} = B(n)$. Kata *weak* pada *weak* **X**-*robustness* tidak berarti versi lebih lemah dari **X**-*robustness*.Pada **X**-*robustness,* orbit mencapai $V(A)$, sedangkan pada *weak* **X**-*robustness,* vektor yang belum berada di $V(A)$ tidak mencapainya.

**Lema 3.1** [Bentuk ekuivalen himpunan atraktor, (Myšková & Plavka, 2013)]. Untuk $A \in B(n \times n)$ berlaku:

(i) $\text{attr}(A) = \{x \in B(n) \mid \exists k \in \mathbb{N}_0,\ A^k \otimes x \in V(A)\}$;

(ii) $\text{attr}(A) = \{x \in B(n) \mid \text{per}(A, x) = 1\}$.

*Bukti.*

(i) Jika $x \in \text{attr}(A)$, terdapat $y \in O(A, x) \cap V(A)$. Karena orbit dapat dipandang sebagai himpunan $\{A^k \otimes x\}$, maka $y = A^k \otimes x$ untuk suatu $k$, sehingga $A^k \otimes x \in V(A)$. Sebaliknya, jika $A^k \otimes x \in V(A)$, maka $A^k \otimes x \in O(A, x) \cap V(A)$.

(ii) Jika $A^k \otimes x \in V(A)$, maka $A^{k+1} \otimes x = A \otimes (A^k \otimes x) = A^k \otimes x$, yaitu $x(k+1) = x(k)$, sehingga $\text{per}(A, x) = 1$. Sebaliknya, jika $\text{per}(A, x) = 1$, terdapat $k$ dengan $x(k+1) = x(k)$, yaitu $A \otimes (A^k \otimes x) = A^k \otimes x$. Jadi, $A^k \otimes x \in V(A)$, dan menurut (i), $x \in \text{attr}(A)$. □

**Lema 3.2.** Untuk setiap $A \in B(n \times n)$ berlaku $V(A) \subseteq \text{attr}(A)$.

*Bukti.* Jika $x \in V(A)$, maka $x(1) = A \otimes x = x$, dan secara induktif $x(r) = x$ untuk setiap $r$. Jadi, $x = x(0) \in O(A, x) \cap V(A)$, sehingga $x \in \text{attr}(A)$. □

**Akibat 3.1** [Bentuk ekuivalen matriks **X**-*robust*, (Myšková & Plavka, 2013)]. Untuk $A \in B(n \times n)$ dan vektor interval **X**, pernyataan berikut ekuivalen:

(i) $A$ adalah matriks **X**-*robust*;

(ii) untuk setiap $x \in \mathbf{X}$ terdapat $k$ sehingga $A^k \otimes x \in V(A)$;

(iii) $\text{per}(A, x) = 1$ untuk setiap $x \in \mathbf{X}$.

*Bukti.* Karena $\mathbf{X} \subseteq B(n)$, Lema 3.1(i) menghasilkan (i) ⇔ (ii), dan Lema 3.1(ii) menghasilkan (i)⇔(iii).

Lema 3.2 adalah hubungan dasar antara kedua himpunan, bahwa setiap titik tetap trivial merupakan anggota himpunan atraktor. Lema 3.1(ii) dan Akibat 3.1(iii) menunjukkan bahwa **X**-*robustness* dapat diperiksa melalui periode orbit setiap vektor di **X**.

**Keterkaitan matriks X-robust dan matriks weakly X-robust**

Nama dan definisi kedua konsep (matriks **X**-*robust,* dan *weakly* **X**-*robust*) seolah-olah menunjukkan keterkaitan langsung. Karena itu, disusun dua dugaan, yaitu

- Dugaan 1**:** setiap matriks **X**-*robust* merupakan matriks *weakly* **X**-*robust*.
- Dugaan 2**:** setiap matriks *weakly* **X**-*robust* merupakan matriks **X**-*robust*.

Kedua dugaan ini dibahas melalui *counter example*. Contoh 3.1 memperlihatkan matriks yang **X**-*robust* tetapi tidak *weakly* **X**-*robust*, sehingga Dugaan 1 salah. Contoh 3.2 memperlihatkan matriks yang *weakly* **X**-*robust* tetapi tidak **X**-*robust*, sehingga Dugaan 2 salah. Dengan demikian, kedua konsep tidak saling mengimplikasikan secara umum. Namun, pernyataan ini tidak berarti keduanya tidak berhubungan sama sekali. Kedua sifat didefinisikan melalui himpunan yang sama, yaitu $V(A)$ dan $\text{attr}(A)$, dan keduanya terhubung melalui Lema 3.2. Keterkaitan tersebut dinyatakan dalam Proposisi 3.1 berikut.

**Proposisi 3.1.** Misalkan $A \in B(n \times n)$ dan $\mathbf{X}$ vektor interval dengan $\mathbf{X} \subseteq V(A)$. Matriks $A$ merupakan matriks **X**-*robust* jika dan hanya jika $A$ merupakan matriks *weakly* **X**-*robust*. Lebih lanjut, dalam keadaan ini kedua sifat berlaku.

*Bukti.* Menurut Lema 3.2, $\mathbf{X} \subseteq V(A) \subseteq \text{attr}(A)$, sehingga $A$ bersifat **X**-*robust*. Selain itu, $\text{attr}(A) \cap \mathbf{X} \subseteq \mathbf{X} \subseteq V(A)$, sehingga $A$ bersifat *weakly* **X**-*robust*. Karena kedua sifat berlaku, keduanya ekuivalen.

**Langkah-langkah menentukan matriks *weakly* X-*robust***

Berdasarkan Definisi 3.11, langkah-langkah untuk menentukan apakah $A \in B(n \times n)$ bersifat *weakly* **X**-*robust* adalah sebagai berikut.

Langkah 1. Menentukan $V(A)$**.** Sistem $A \otimes x = x$, yaitu $\max_j \min(a_{ij}, x_j) = x_i$ untuk $i = 1, \ldots, n$, diselesaikan dengan analisis kasus. Analisis kasus mempertimbangkan posisi setiap $x_j$ terhadap elemen $a_{ij}$, karena $\min(a_{ij}, x_j) = x_j$ jika $x_j \leq a_{ij}$ dan $\min(a_{ij}, x_j) = a_{ij}$ jika $x_j > a_{ij}$.

Langkah 2. Menentukan $\text{attr}(A)$**.**

(a) Urutkan elemen-elemen $A$ yang berbeda, misalnya $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$. Bentuk interval $I_1 = [0, a_1]$, $I_2 = (a_1, a_2]$, …, $I_{m+1} = (a_m, 1]$. Interval kosong diabaikan.

(b) Bentuk daerah $B_{ij} = I_i \times I_j = \{x \mid x_1 \in I_i,\ x_2 \in I_j\}$ untuk matriks $2 \times 2$. Untuk matriks $n \times n$, daerahnya berbentuk $I_{i_1} \times \cdots \times I_{i_n}$.

(c) Untuk setiap daerah, hitung orbit $x(1), x(2), \ldots$ secara simbolik. Jika terdapat $r$ dengan $x(r) \in V(A)$, daerah tersebut (atau bagiannya) termuat dalam $\text{attr}(A)$. Jika orbit *ultimately periodic* dengan periode lebih dari satu, maka menurut Lema 3.1(ii) daerah tersebut tidak termuat dalam $\text{attr}(A)$.

Langkah 3. Memeriksa $\text{attr}(A) \cap \mathbf{X} \subseteq V(A)$**.** Tentukan irisan $\text{attr}(A) \cap \mathbf{X}$, lalu periksa apakah setiap anggotanya termuat dalam $V(A)$. Pada langkah yang sama, **X**-*robustness* diperiksa melalui $\mathbf{X} \subseteq \text{attr}(A)$.

**Contoh 3.1 (*Counter example* untuk dugaan 1)**

Diberikan

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_1 = \left[\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.8 \end{bmatrix}\right] = \{x \mid 0.3 \le x_1 \le 0.5,\ 0.6 \le x_2 \le 0.8\}.$$

*Langkah 1.* $A_1 \otimes x = x$ memberikan $\max\big(\min(0.3, x_1), \min(0.3, x_2)\big) = x_1$ dan $\max\big(\min(0.3, x_1), \min(0.3, x_2)\big) = x_2$. Jadi, $x_1 = x_2$. Jika $x_1 = x_2 = t$, persamaan menjadi $\min(0.3, t) = t$, yang berlaku jika dan hanya jika $t \le 0.3$. Diperoleh

$$V(A_1) = \{(t, t)^T \mid 0 \le t \le 0.3\}.$$

*Langkah 2.* Elemen $A_1$ hanya $0.3$, sehingga $I_1 = [0,0.3]$ dan $I_2 = (0.3,1]$. Untuk setiap $x$ berlaku

$$x(1) = A_1 \otimes x = \begin{bmatrix} \max\big(\min(0.3, x_1), \min(0.3, x_2)\big) \\ \max\big(\min(0.3, x_1), \min(0.3, x_2)\big) \end{bmatrix}.$$

Pada $B_{11}$ diperoleh $x(1) = (t, t)^T$ dengan $t = \max(x_1, x_2) \le 0.3$. Pada $B_{12}$, $B_{21}$, dan $B_{22}$ diperoleh $x(1) = (0.3,0.3)^T$. Dalam semua kasus, $x(1) \in V(A_1)$, sehingga $\text{attr}(A_1) = D(2) = [0,1]^2$.

*Langkah 3.* Karena $\mathbf{X}_1 \subseteq D(2) = \text{attr}(A_1)$, matriks $A_1$ bersifat $\mathbf{X}_1$ -*robust*. Namun, $\text{attr}(A_1) \cap \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1$. Vektor $x = (0.4,0.6)^T \in \mathbf{X}_1$ memenuhi $A_1 \otimes x = (0.3,0.3)^T \neq x$, sehingga $x \notin V(A_1)$. Bahkan $\mathbf{X}_1 \cap V(A_1) = \varnothing$ karena setiap $x \in \mathbf{X}_1$ memenuhi $x_2 \ge 0.6 > 0.3$. Jadi, $A_1$ tidak *weakly* $\mathbf{X}_1$-*robust*.

**Contoh 3.2 (*Counter example* untuk dugaan 2)**

Diberikan

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.8 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_2 = \left[\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}\right] = \{x \mid 0.4 \le x_1 \le 0.6,\ 0.4 \le x_2 \le 0.6\}.$$

*Langkah 1.* Sistem $A_2 \otimes x = x$ adalah

$$\max\big(\min(0.2, x_1), \min(0.6, x_2)\big) = x_1,$$
$$\max\big(\min(0.8, x_1), \min(0.4, x_2)\big) = x_2.$$

Kasus dibagi menurut $x_2 \le 0.6$ dan $x_2 > 0.6$.

- *Kasus* $x_2 \le 0.6$. Persamaan pertama memberikan $x_1 \ge x_2$, dan persamaan kedua memberikan $x_2 \ge \min(0.8, x_1)$. Jika $x_1 \le 0.8$, diperoleh $x_2 \ge x_1$, sehingga $x_1 = x_2 \le 0.6$. Substitusi $x = (t, t)^T$ dengan $t \le 0.6$ memenuhi kedua persamaan. Jika $x_1 > 0.8$, maka $x_2 \ge 0.8$, yang bertentangan dengan $x_2 \le 0.6$.

- *Kasus* $x_2 > 0.6$. Persamaan pertama memberikan $x_1 = \max(\min(0.2, x_1), 0.6)$, sehingga $x_1 = 0.6$. Persamaan kedua memberikan $x_2 = \max(0.6,0.4) = 0.6$, yang bertentangan dengan $x_2 > 0.6$.

Jadi,

$$V(A_2) = \{(t,t)^T \mid 0 \le t \le 0.6\}.$$

*Langkah 2.* Elemen $A_2$ adalah $\{0.2,0.4,0.6,0.8\}$, sehingga diperoleh lima interval

$$I_1 = [0,0.2],\ I_2 = (0.2,0.4],\ I_3 = (0.4,0.6],\ I_4 = (0.6,0.8],\ I_5 = (0.8,1],$$

dan 25 daerah $B_{ij}$. Orbit setiap daerah dihitung secara simbolik. Keperiodikan orbit dapat dibuktikan dengan induksi matematika. Sebagai gambaran, pada daerah $B_{33}$ dengan $0.4 < x_1, x_2 \le 0.6$ berlaku $\min(0.2, x_1) = 0.2 \le x_2 = \min(0.6, x_2)$ dan $\min(0.4, x_2) = 0.4 \le x_1 = \min(0.8, x_1)$, sehingga

$$A_2 \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \qquad A_2^2 \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Jika $x_1 = x_2$, maka $x(0) \in V(A_2)$. Jika $x_1 \neq x_2$, kedua komponen saling bertukar sehingga $x(k+2) = x(k)$ untuk setiap $k \ge 1$ Orbitnya *ultimately periodic* dengan periode 2 dan tidak pernah mencapai $V(A_2)$.

$$\mathrm{attr}(A_2) = \left\{ x \in [0,1]^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} (0 \le x_1 \le 0.4,\ 0 \le x_2 \le 0.4) \text{ atau} \\ (x_1 = x_2,\ 0.4 < x_1 \le 0.6) \text{ atau} \\ (0.6 \le x_1 \le 1,\ 0.6 \le x_2 \le 1) \end{array} \right\}.$$

*Langkah 3.* Irisan dengan $\mathbf{X}_2$ adalah $\mathrm{attr}(A_2) \cap \mathbf{X}_2 = \{(t,t)^T \mid 0.4 \le t \le 0.6\} \subseteq V(A_2)$, sehingga $A_2$ bersifat *weakly* $\mathbf{X}_2$*-robust*. Akan tetapi, $(0.4,0.5)^T \in \mathbf{X}_2$ menghasilkan orbit $(0.4,0.5)^T \to (0.5,0.4)^T \to (0.4,0.5)^T \to \cdots$ yang periodik dengan periode 2. Jadi, $(0.4,0.5)^T \notin \mathrm{attr}(A_2)$, dan $A_2$ tidak $\mathbf{X}_2$*-robust*.

**Contoh 3.3 (hanya X-robust)**

Diberikan

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.7 \\ 0.6 & 0.3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X}_3 = \left[ \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.5 \end{bmatrix} \right].$$

*Langkah 1.* Dengan menggunakan $\max\big(\min(0.6, x_1), \min(0.7, x_2)\big) = x_1$ dan $\max\big(\min(0.6, x_1), \min(0.3, x_2)\big) = x_2$, analisis kasus $x_2 \le 0.7$ dan $x_2 > 0.7$ memberikan

$$V(A_3) = \{(t,t)^T \mid 0 \le t \le 0.6\}.$$

Sebagai contoh, pada subkasus $x_1 > 0.6$ dan $0.6 \le x_2 \le 0.7$ diperoleh $A_3 \otimes x = (x_2, 0.6)^T \neq x$.

*Langkah 2.* Elemen $A_3$ adalah $\{0.3,0.6,0.7\}$, sehingga diperoleh $I_1 = [0,0.3]$, $I_2 = (0.3,0.6]$, $I_3 = (0.6,0.7]$, dan $I_4 = (0.7,1]$. Perhitungan orbit pada keenam belas daerah $B_{ij}$ menunjukkan bahwa setiap orbit mencapai $V(A_3)$ paling lambat pada iterasi kedua. Misalnya, pada $B_{44}$ berlaku $x(1) = (0.7,0.6)^T$ dan $x(2) = (0.6,0.6)^T \in V(A_3)$. Jadi, $\text{attr}(A_3) = D(2)$.

*Langkah 3.* Karena $\text{attr}(A_3) = D(2)$, matriks $A_3$ bersifat $\mathbf{X}_3$-*robust* dan $\text{attr}(A_3) \cap \mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_3$. Vektor $(0.4,0.3)^T \in \mathbf{X}_3$ memenuhi $A_3 \otimes (0.4,0.3)^T = (0.4,0.4)^T \neq (0.4,0.3)^T$, sehingga $(0.4,0.3)^T \notin V(A_3)$. Jadi, $A_3$ tidak *weakly* $\mathbf{X}_3$-*robust*.

**Contoh 3.4 (Ilustrasi dari Proposisi 3.1).** Diberikan

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_4 = \left[\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix}\right] = \{x \mid 0.3 \le x_1 \le 0.4,\ 0.4 \le x_2 \le 0.5\}.$$

*Langkah 1.* Dari $\max\big(\min(0.5, x_1), \min(0.3, x_2)\big) = x_1$
dan $\max\big(\min(0.4, x_1), \min(0.6, x_2)\big) = x_2$, analisis kasus memberikan

$$V(A_4) = \left\{ x \in [0,1]^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} (x_1 = x_2,\ 0 \le x_1 \le 0.3) \text{ atau} \\ (x_2 \ge x_1,\ 0.3 \le x_1 \le 0.4,\ 0.3 < x_2 \le 0.6) \text{ atau} \\ (0.4 < x_1 \le 0.5,\ 0.4 \le x_2 \le 0.6) \end{array} \right\}.$$

*Langkah 2.* Elemen $A_4$ adalah $\{0.3,0.4,0.5,0.6\}$, sehingga diperoleh lima interval dan 25 daerah $B_{ij}$. Pada setiap daerah, $x(1) \in V(A_4)$ atau $x(0)$ sudah merupakan titik tetap. Misalnya, pada $B_{55}$ $(x_1, x_2 > 0.6)$ berlaku $x(1) = (0.5,0.6)^T \in V(A_4)$. Jadi, $\text{attr}(A_4) = D(2)$.

*Langkah 3.* Setiap $x \in \mathbf{X}_4$ memenuhi $0.3 \le x_1 \le 0.4 \le x_2 \le 0.5$, sehingga termasuk dalam bagian kedua $V(A_4)$. Jadi, $\mathbf{X}_4 \subseteq V(A_4)$. Menurut Proposisi 3.1, $A_4$ bersifat $\mathbf{X}_4$-*robust* sekaligus.

## 4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, diperoleh dua simpulan berikut.

1. Matriks **X**-*robust* dan matriks *weakly* **X**-*robust* tidak saling mengimplikasikan secara umum. Matriks **X**-*robust* belum tentu *weakly* **X**-*robust* (Contoh 3.1 dan 3.3), dan matriks *weakly* **X**-*robust* belum tentu **X**-*robust* (Contoh 3.2). Status suatu matriks bergantung pada vektor interval **X** yang ditentukan, dan untuk matriks yang sama keempat kemungkinan hubungan dapat terjadi (Tabel 6). Jika $\mathbf{X} \subseteq V(A)$, kedua sifat ekuivalen dan keduanya berlaku (Proposisi 3.1 dan Contoh 3.4).
2. Langkah-langkah untuk menentukan apakah matriks $n \times n$ bersifat *weakly* **X**-*robust* adalah: (1) menentukan $V(A)$ dengan analisis kasus terhadap elemen matriks; (2) menentukan $\text{attr}(A)$ dengan membagi domain menjadi daerah-daerah berdasarkan

elemen matriks, lalu memeriksa orbit pada setiap daerah; dan (3) menunjukkan berlakunya $\text{attr}(A) \cap \mathbf{X} \subseteq V(A)$ untuk vektor interval $\mathbf{X}$ yang diberikan.

Penelitian selanjutnya dapat mengkaji keterkaitan *weak robustness* dengan *weak* **X**-*robustness*, keterkaitan **X** -*robustness* dengan *strong* **X** -*robustness*, karakterisasi *weak* **X** -*robustness* berbasis elemen matriks, serta penerapan langkah-langkah pada matriks berordo lebih tinggi dan matriks interval.

## 5. DAFTAR PUSTAKA

Golan, J. S. (1999). *Semirings and their applications*. Kluwer Academic Publishers.

Molnárová, M., Myšková, H., & Plavka, J. (2013). The robustness of interval fuzzy matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, *438*(8), 3350–3364. https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.12.020.

Muanalifah, A., Isnawati, A. R., Artes, R. Jr., & Nurwan, N. (2023). The tropical version of El Gamal encryption. *Journal of Natural Sciences and Mathematics Research*, *9*(2), 151–157. https://doi.org/10.21580/jnsmr.v9i2.18704.

Myšková, H. (2012a). Interval eigenvectors of circulant matrices in fuzzy algebra. *Acta Electrotechnica et Informatica*, *12*(3), 57–61. https://doi.org/10.2478/v10198-012-0033-3.

Myšková, H. (2012b). Weak stability of interval orbits of circulant matrices in fuzzy algebra. *Acta Electrotechnica et Informatica*, *12*(3), 51–56. https://doi.org/10.2478/v10198-012-0032-4.

Myšková, H., & Plavka, J. (2013). X-robustness of interval circulant matrices in fuzzy algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, *438*(6), 2757–2769. https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.11.026.

Myšková, H., & Plavka, J. (2021). Strong X-robustness of interval max-min matrices. *Kybernetika*, *57*(4), 594–612. https://doi.org/10.14736/kyb-2021-4-0594.

Myšková, H., & Plavka, J. (2023). AE and EA versions of X-robustness for interval circulant matrices in max–min algebra. *Linear and Multilinear Algebra*, *71*(15), 2441–2461. https://doi.org/10.1080/03081087.2022.2105783.

Plavka, J. (2013). On the weak robustness of fuzzy matrices. *Kybernetika*, *49*(1), 128–140.

Plavka, J., & Berežný, Š. (2018). X-simplicity of interval max-min matrices. *Kybernetika*, *54*(3), 413–426. https://doi.org/10.14736/kyb-2018-3-0413.

Plavka, J., & Sergeev, S. (2016). Characterizing matrices with X-simple image eigenspace in max-min semiring. *Kybernetika*, *52*(4), 497–513. https://doi.org/10.14736/kyb-2016-4-0497.

Semančíková, B. (2007). Orbits and critical components of matrices in max-min algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, *426*, 415–447. https://doi.org/10.1016/j.laa.2007.05.017.

Zhou, D., Chen, G., Wu, G., & Chen, X. (2016). Perturbation bounds for eigenvalues of diagonalizable matrices and singular values. *Journal of Inequalities and Applications*, *2016*, 113. https://doi.org/10.1186/s13660-016-1053-9.