e-ISSN: 2714-5506
p-ISSN: 2714-609X

SQUARE : Journal of Mathematics and Mathematics Education
Volume 8, No. 2, 2026, pp. 93-108
http://dx.doi.org/10.21580/square.2026.8.2.34679

Pemodelan Dinamis dan Kendali Optimal Produksi Energi Biodiesel Menggunakan Mikroalga dengan Strategi Kultivasi Dua Tahap

Prismahardi Aji Riyantoko[1*], Nur Ilmayasinta[2]
[1]Departemen Sains Data, Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Pembangunan Nasional "Veteran" Jawa Timur,
[2]Jurusan Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Islam Lamongan
[*]prismahardi.aji.ds@upnjatim.ac.id

ABSTRAK

Produksi biodiesel mikroalga memerlukan keseimbangan lipid dan kebutuhan energi. Penelitian ini mengembangkan model dinamis nonlinier lima variabel keadaan untuk biomassa nonlipid, lipid, nitrogen, karbon, dan aktivitas fotosintesis dalam kultivasi dua tahap dengan peta loncatan pergantian medium. Enam parameter diestimasi: fiksasi karbon ($p_{\max}$), peredaman cahaya (k_e), respons CO_2 (k_g), kebutuhan nitrogen (q_N), stres fotosintesis (k_s), dan alokasi lipid (θ_0). Sembilan pasangan data biomassa dan lipid *Chlorella sorokiniana* hari ke-14 digunakan untuk kalibrasi. Analisis matematis memeriksa ketaknegatifan dan neraca massa; simulasi menguji validasi silang, kendali berbatas, dan waktu perpindahan. RMSE kalibrasi biomassa dan lipid masing-masing 0,721 dan 0,311 g/L, sedangkan RMSE validasi 1,213 dan 0,381 g/L. Pada kultur 0,2 L selama 14 hari, perpindahan hari ke-12 memberikan energi biodiesel parsial tertinggi di antara kandidat hari ke-2 hingga ke-12, yaitu 2,076 kJ, tetapi 7,20% di bawah batch (2,237 kJ). Kinerja energi dipengaruhi biaya pergantian medium, sementara akurasi antarkondisi masih terbatas. Kebaruan formulasi terletak pada evaluasi bersama loncatan keadaan pergantian medium, retensi biomassa, dan biaya energi perpindahan terhadap energi biodiesel parsial.

Kata Kunci: Mikroalga, Sistem Dinamis, Kultivasi Dua Tahap, Kendali Optimal, Energi Biodiesel.

ABSTRACT

Microalgae biodiesel production must balance lipid accumulation against operating energy. This study develops a nonlinear five-state dynamic model of nonlipid biomass, lipids, nitrogen, inorganic carbon, and relative photosynthetic activity for two-stage cultivation, with a hybrid jump map for medium replacement. Six parameters are estimated: carbon fixation capacity (p_{max}), light attenuation (k_e), CO_2 response (k_g), specific nitrogen requirement (q_N), stress-induced photosynthetic decline (k_s), and basal lipid allocation (θ_0). Calibration uses nine paired biomass and lipid observations of Chlorella sorokiniana on day 14. Mathematical analysis checks solution nonnegativity and mass balance; numerical evaluation applies cross-validation, bounded control, and switching-time comparisons. Calibration RMSEs are 0.721 and 0.311 g/L for biomass and lipids, increasing to 1.213 and 0.381 g/L under leave-one-treatment-out validation. Over 14 days in a 0.2 L culture, switching on day 12 maximizes partial biodiesel energy among candidate days 2–12 (2.076 kJ), but remains 7.20% below the reference batch (2.237 kJ). Medium replacement penalizes energy performance, while prediction across treatments remains uncertain. The contribution is a joint evaluation of medium-replacement state jumps, biomass retention, and switching-energy costs within partial biodiesel energy.

Keywords: *Microalgae, Dynamic Systems, Two-Stage Cultivation, Optimal Control, Biodiesel Energy.*

1. PENDAHULUAN

Mikroalga berpotensi menjadi bahan baku biodiesel karena dapat mengakumulasi lipid di dalam sel. Akan tetapi, peningkatan lipid tidak selalu menaikkan energi biodiesel parsial karena pencahayaan, pengelolaan medium, dan pemanenan membutuhkan energi. Analisis daur hidup menunjukkan bahwa tahap kultivasi, pemanenan, dan pengeringan turut menentukan dampak lingkungan biodiesel mikroalga (Liu et al., 2025). Pilihan sumber energi serta konfigurasi pencahayaan fotobioreaktor juga memengaruhi kebutuhan energi operasi. Model dinamis telah digunakan untuk mempelajari pengaruh cahaya dan nutrien terhadap pertumbuhan serta pembentukan lipid (del Rio-Chanona et al., 2018; Wang et al., 2019) . Karena itu, evaluasi lipid perlu dikaitkan dengan biaya energi dalam satu kerangka pemodelan. Strategi kultivasi dua tahap mengoptimalkan pertumbuhan biomassa pada medium kaya nitrogen dan mendorong akumulasi lipid melalui pembatasan nitrogen (Tripathi et al., 2025; Trivedi et al., 2022) .Pembatasan nitrogen memicu pembentukan triasilgliserol dan perubahan membran tilakoid, tetapi stres berkepanjangan dapat menurunkan asimilasi karbon serta aktivitas fotosintesis (Chambonniere et al., 2026; Vijayan et al., 2024). Oleh karena itu, penentuan waktu perpindahan antartahap perlu mempertimbangkan keseimbangan antara pertumbuhan biomassa, akumulasi lipid, dan aktivitas fotosintesis.

Pergantian medium pada awal tahap kedua mengubah kadar nitrogen dan karbon anorganik serta berpotensi mengurangi biomassa, sementara hubungan biomassa, lipid, cahaya, dan fraksi CO_2 telah dikaji pada Chlorella sorokiniana (Montoya-Vallejo et al., 2023) .Penelitian sebelumnya mengoptimalkan pertumbuhan melalui kendali pencahayaan dan laju pengenceran, serta menunjukkan pengaruh waktu perpindahan terhadap produktivitas lipid dan ketidakpastian parameter terhadap keputusan operasi (Fierro U. et al., 2023; Kivanc et al., 2025; Liu et al., 2024) . Namun, penelitian tersebut belum secara khusus menguji pengaruh gabungan loncatan keadaan akibat pergantian medium terhadap energi biodiesel parsial dalam formulasi ini. Evaluasi perubahan tersebut diperlukan karena kehilangan biomassa dan biaya pergantian medium dapat meniadakan manfaat peningkatan akumulasi lipid. Berbeda dari optimasi cahaya atau produktivitas lipid sebagai sasaran tersendiri, formulasi ini menguji pengaruh pergantian medium terhadap neraca energi parsial.

Studi ini memformulasikan model dinamis nonlinier dengan lima variabel keadaan, yaitu biomassa nonlipid, lipid, nitrogen tersedia, karbon anorganik, dan aktivitas fotosintesis relatif, yang saling terhubung melalui fiksasi dan alokasi karbon, penyerapan nitrogen, serta perubahan aktivitas fotosintesis. Model hibrida menggunakan peta loncatan untuk merepresentasikan perubahan keadaan seketika akibat pergantian medium pada waktu τ. Optimasi mengendalikan laju pemberian nitrogen, intensitas cahaya tambahan, laju pemanenan, dan waktu perpindahan antartahap untuk memaksimalkan energi biodiesel parsial setelah dikurangi energi penyediaan nitrogen, pencahayaan tambahan, dan pemrosesan biomassa. Biomassa nonlipid mewakili pertumbuhan sel, lipid menentukan potensi bahan bakar, nitrogen mengatur alokasi karbon, sedangkan karbon anorganik dan aktivitas fotosintesis memengaruhi fiksasi. Kalibrasi menggunakan sembilan pasangan data biomassa dan lipid *Chlorella sorokiniana* pada hari ke-14 untuk mengestimasi enam parameter model, kemudian mengevaluasi ketaknegatifan solusi, neraca massa, kalibrasi, dan validasi silang (Montoya-Vallejo et al., 2023) . Selanjutnya, model mengoptimalkan kendali berbatas, menganalisis sensitivitas parameter, serta membandingkan

waktu pergantian medium untuk menentukan kebijakan dua tahap dengan energi biodiesel parsial tertinggi di antara alternatif yang diuji dan membandingkannya dengan kultur batch acuan. Kontribusi penelitian terletak pada integrasi dinamika biologis, pergantian medium, dan optimasi energi biodiesel parsial dalam satu kerangka pemodelan. Integrasi numerik memakai Runge–Kutta orde empat dan optimasi kendali berbatas. Pada kandidat yang diuji, energi parsial dua tahap terbaik tetap 7,20% lebih rendah daripada proses secara bertahap.

2. METODE

Bagian metode menguraikan data sekunder, model dinamis, pembuktian matematis, kalibrasi dan validasi, serta optimasi kendali hibrida.

2.1. Data dan Asumsi

Data sekunder diperoleh dari sembilan perlakuan Chlorella sorokiniana selama 14 hari pada reaktor 0,2 L dengan fotoperiode 12:12 jam (Montoya-Vallejo et al., 2023) . Cahaya diuji pada 13, 39, dan 65 µmol m^{-2} s^{-1}, sedangkan fraksi CO_2 sebesar 0,03%, 10%, dan 20%. Data akhir digunakan untuk estimasi parameter dan validasi prediksi antarkondisi.

Biomassa total $B(t)$ merupakan jumlah biomassa nonlipid $X(t)$ dan lipid $L(t)$. Untuk setiap perlakuan i, persentase lipid p_i dikonversi menjadi konsentrasi lipid terhitung $L_{\mathrm{obs},i}$ dari biomassa total teramati $B_{\mathrm{obs},i}$ melalui Persamaan (1).

$$B(t) = X(t) + L(t) \text{ dan } L_{obs,i} = B_{obs,i}\,\frac{p_i}{100} \tag{1}$$

Tabel 1 memuat perlakuan T1–T9, intensitas cahaya I_s (µmol m^{-2} s^{-1}), fraksi gas CO_2 (%), biomassa total rerata B_{obs} ± simpangan baku (g/L), persentase lipid p (%), dan lipid terhitung L_{obs} (g/L). Biomassa tertinggi tercatat pada T3 (3,45 g/L), sedangkan konsentrasi lipid terhitung tertinggi pada T4 (0,694 g/L). Nilai lipid terhitung bukan pengamatan independen (Montoya-Vallejo et al., 2023).

Tabel 1. Biomassa dan lipid sembilan perlakuan pada hari ke-14 (Montoya-Vallejo et al, 2023)

Perlakuan	Cahaya ($\mu mol/m^2/s$)	CO_2	Biomassa ± SD (g/L)	Lipid (%)	Lipid dihitung (g/L)
T1	13	0.03	0.44 ± 0.14	37.1	0.163
T2	39	0.03	2.81 ± 0.16	15.8	0.444
T3	65	0.03	3.45 ± 0.20	13.5	0.466
T4	13	10	2.21 ± 0.16	31.4	0.694
T5	39	10	2.02 ± 0.91	15.4	0.311
T6	65	10	2.93 ± 0.30	17.2	0.504
T7	13	20	1.08 ± 0.52	49.1	0.530
T8	39	20	2.28 ± 0.39	22.3	0.508
T9	65	20	1.72 ± 0.29	38.9	0.669

2.2. Variabel dan Parameter

Vektor keadaan $\mathrm{y(t)} = [\mathrm{X(t)}, \mathrm{L(t)}, \mathrm{N(t)}, \mathrm{C(t)}, \mathrm{a(t)}]^{\mathrm{T}}$ memuat biomassa nonlipid X, lipid L, nitrogen tersedia N, karbon anorganik efektif C (keempatnya dalam g/L), dan aktivitas fotosintesis relatif a (tak berdimensi, $0 \le \mathrm{a} \le 1$). Masukan kendali adalah pemberian nitrogen $\mathrm{u_N(t)}$ (g N $\mathrm{L^{-1}}$ $\mathrm{hari^{-1}}$), LED tambahan $\mathrm{u_I(t)}$ (µmol $\mathrm{m^{-2}}$ $\mathrm{s^{-1}}$), dan laju pemanenan h(t) ($\mathrm{hari^{-1}}$). Fraksi $\mathrm{CO_2}$ gas masuk s (0–1) merupakan kondisi perlakuan, bukan kendali. Variabel

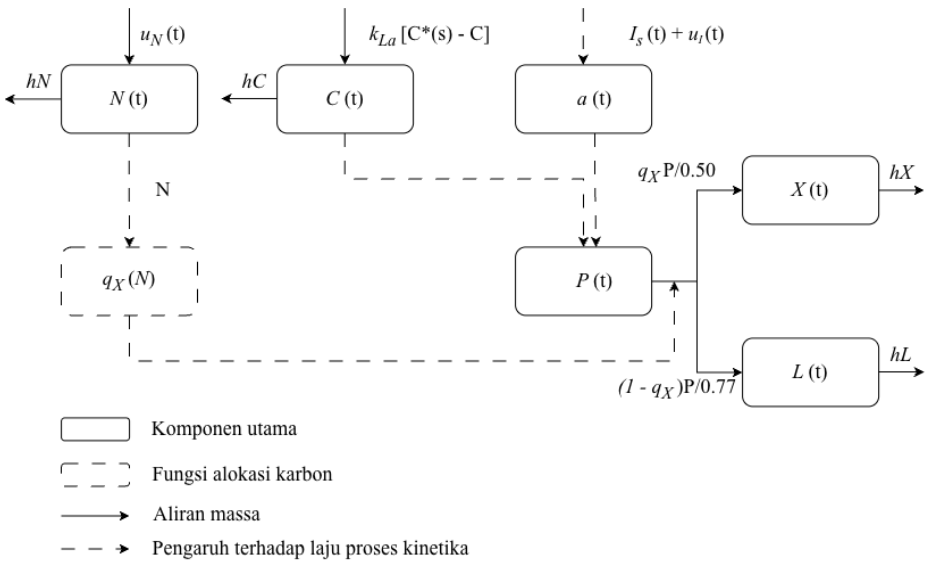
keadaan menyatakan kondisi kultur yang berubah terhadap waktu, sedangkan parameter mengatur laju dan sensitivitas persamaan.

Enam parameter dikalibrasi dari data akhir, sedangkan fosfor, pH, temperatur, pati, dan spektrum cahaya tidak menjadi keadaan tersendiri. Pemisahan biomassa dan lipid mengikuti (Mozumder et al., 2024) . Penyederhanaan ini tidak sepenuhnya memuat penyimpanan karbohidrat maupun efek konsentrasi sel (Papapanagiotou et al., 2024; Six et al., 2026) .

Sumber eksperimen (Montoya-Vallejo et al., 2023) melaporkan $0{,}67\ \mathrm{g\,KNO_3\,L^{-1}}$ sebagai kondisi yang menjadi acuan untuk konsentrasi nitrogen. Kadar tersebut dikonversi menjadi pendekatan nitrogen awal sebesar $0{,}093\ \mathrm{g\,N/L}$. Nilai awal biomassa nonlipid ditetapkan $\mathrm{X}(0) = 0{,}085$ g/L dan lipid ditetapkan $\mathrm{L}(0) = 0{,}015$ g/L, sehingga biomassa awal berjumlah 0,1 g/L dengan fraksi lipid asumsi 15%. Karbon awal diasumsikan sama dengan konsentrasi kesetimbangan $\mathrm{C}^*(\mathrm{s})$. Nilai awal yang tidak berasal dari pengamatan langsung diperlakukan sebagai asumsi dan dipertahankan secara konsisten pada simulasi pembanding. Acuan kondisi nitrogen berasal dari sumber eksperimen tersebut, sedangkan nilai awal yang tidak diukur langsung merupakan asumsi simulasi.

Enam parameter estimasi mengatur kapasitas fiksasi karbon ($\mathrm{p_{max}}$), peredaman cahaya ($\mathrm{k_e}$), respons gas ($\mathrm{k_g}$), kebutuhan nitrogen ($\mathrm{q_N}$), stres fotosintesis ($\mathrm{k_s}$), dan alokasi lipid dasar (θ_0) . Parameter $\mathrm{p_{max}}$ bersatuan $\mathrm{g\,C\,(g\,X)^{-1}\,hari^{-1}}$, $\mathrm{q_N}$ bersatuan $\mathrm{g\,N\,(g\,X)^{-1}}$, dan $\mathrm{k_s}$ bersatuan $\mathrm{hari^{-1}}$. Koordinat optik dinormalisasi sehingga $\mathrm{k_e}$ bersatuan L/g; $\mathrm{k_g}$ dan θ_0 tak berdimensi. Fraksi gas masuk $\mathrm{CO_2}$ dinyatakan sebagai pecahan, misalnya 10% menjadi $\mathrm{s} = 0{,}10$. Notasi dan satuan utama dinyatakan secara eksplisit untuk membedakan variabel keadaan, parameter, kondisi perlakuan, dan masukan kendali.

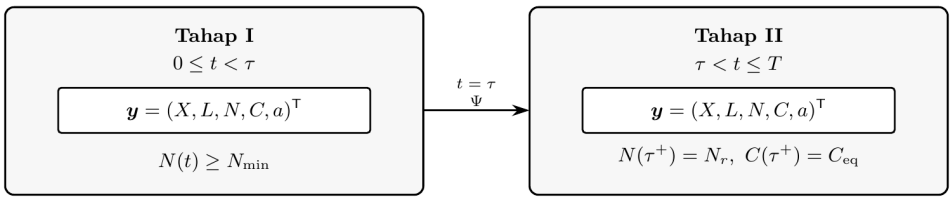
2.3. Model Dinamis Mikroalga



Gambar 1. Diagram kompartemen kontinu pada massa dan pengaruh kinetika.

Gambar 1 menghubungkan nitrogen tersedia $N(t)$, karbon anorganik $C(t)$, aktivitas fotosintesis $a(t)$, biomassa nonlipid $X(t)$, dan lipid $L(t)$ melalui fiksasi karbon $P(t)$ serta fraksi alokasi ke biomassa $q_X(N)$. Masukan u_N menambah nitrogen, $I_s + u_I$ memasok cahaya, $k_{La}[C^*(s) - C]$ menyatakan pertukaran karbon, dan h menunjukkan keluaran panen. Panah

penuh adalah aliran massa, sedangkan panah putus-putus menunjukkan pengaruh kinetika; perubahan N menggeser alokasi karbon antara X dan L. Gambar 1 menyajikan diagram kompartemen kontinu, sedangkan Gambar 2 secara terpisah memperlihatkan perpindahan tahap kultivasi. Diagram kompartemen pada Gambar 1 diformulasikan menjadi sistem diferensial utama pada Persamaan (7) dengan fungsi pendukung Persamaan (2)–(6).



Gambar 2. Pergantian medium dan pembaruan keadaan pada dua tahap kultivasi.

Gambar 2 membedakan tahap I ($0 \le t < \tau$) untuk pertumbuhan dengan $N(t) \ge N_{\min}$ dan tahap II ($\tau < t \le T$) untuk akumulasi lipid. Pada waktu perpindahan τ, peta Ψ menghubungkan keadaan sebelum $y(\tau^-)$ dan sesudah $y(\tau^+)$, termasuk penggantian nitrogen ke N_r dan karbon ke C_{eq}. Dengan demikian, perpindahan tahap mengubah kondisi kultur secara seketika, bukan sekadar jadwal kendali.

Model peredaman dan perpindahan radiasi serta dinamika hidrodinamika menunjukkan pengaruh pertumbuhan biomassa dan geometri reaktor terhadap distribusi cahaya serta kondisi kultivasi (Belohlav et al., 2024; Gu et al., 2023; Li et al., 2023; Ma et al., 2024; Taborda et al., 2026) . Penelitian ini menyederhanakan respons cahaya, karbon, dan alokasi hasil fiksasi dalam model lima keadaan dengan posisi optik ternormalisasi $0 \le z \le 1$, dan koefisien peredaman k_e bersatuan L/g. Persamaan (2) menerapkan hukum Lambert–Beer untuk menghitung intensitas cahaya berdasarkan cahaya dasar $\backslash I_s(t)$, LED $u_I(t)$, dan biomassa $X(t) + L(t)$ (Fierro U. et al., 2023) .

$$I(z,t) = [I_s(t) + u_I(t)] \cdot \exp[-k_e(X(t) + L(t))z] \tag{2}$$

Respons cahaya efektif $\Phi(t)$ kemudian diperoleh dengan mengintegralkan fungsi saturasi dan fotoinhibisi $g(I)$ sepanjang lintasan optik yang ternormalisasi. Kedua fungsi tersebut dinyatakan pada Persamaan (3), termasuk faktor fotoperiode $0{,}5$. Fotoinhibisi dan fotoaklimasi memengaruhi respons fotosintesis (Fierro U. et al., 2024) . Fungsi empiris $g(I)$ pada Persamaan (3) dan koefisien normalisasinya adalah asumsi simulasi.

$$g(I) = \frac{I}{25 + I + \frac{I^2}{3000}} \text{ dan } \Phi(t) = \frac{0.5}{g(39)} \int_0^1 g\big(I(z,t)\big) dz \tag{3}$$

Fungsi cahaya diintegrasikan menggunakan aturan titik tengah enam subinterval. Fotoperiode 12:12 jam memberi faktor 0,5, sedangkan konstanta 25 dan 3000 merupakan asumsi. Fraksi CO_2 gas masuk s digunakan untuk menentukan konsentrasi kesetimbangan karbon $C^*(s)$ dan faktor respons gas $G(s)$. Kedua fungsi empiris tersebut dinyatakan pada Persamaan (4).

$$C^*(s) = 0.15 + 0.45 \frac{s}{20.03 + s} \text{ dan } \mathrm{G(s)} = \frac{1 + 1.5s/(0.02 + s)}{1 + (s/kg)^2} \tag{4}$$

Laju fiksasi karbon efektif $P(t)$ bergantung pada kapasitas spesifik $p_{\max}$, biomassa fotosintetik X, aktivitas relatif a, ketersediaan karbon C, respons cahaya Φ, dan respons gas G. Keterkaitan tersebut dirangkum pada Persamaan (5).

$$P(t) = p_{max} a(t) X(t) \frac{C(t)}{0.045 + C(t)} \Phi(t) G(s) \tag{5}$$

Alokasi karbon ke biomassa nonlipid dan lipid dibedakan menurut ketersediaan nitrogen. Fungsi $\theta(N)$ menggambarkan kecenderungan alokasi lipid, sedangkan $q_X(N)$ menyatakan bagian fiksasi karbon yang digunakan untuk membentuk biomassa nonlipid. Hubungan kedua fungsi dituliskan pada Persamaan (6).

$$\theta(N) = \theta_0 + (0.62 - \theta_0)\frac{0.022}{0.022+N} \text{ dan } q_X(N) = [1 - \theta(N)]\frac{N}{0.010+N} \quad (6)$$

2.3.1 Sistem persamaan diferensial

Berdasarkan fungsi pendukung pada Persamaan (2)–(6), Persamaan (7) memuat pertumbuhan biomassa nonlipid dan lipid, konsumsi serta remineralisasi nitrogen, pertukaran gas dan fiksasi karbon, serta perubahan aktivitas fotosintesis. Kendali nitrogen $u_N(t)$ dan pengenceran memengaruhi neraca massa. Seluruh perubahan berlangsung kontinu kecuali pada peristiwa pergantian medium. Persamaan (7) menjadi model utama, sedangkan Persamaan (2)–(6) dipertahankan sebagai definisi fungsi penyusun agar model nonlinier dapat ditelusuri.

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= \frac{q_X P}{0.50} - (0.008 + h)\,X, \\
\dot{L} &= \frac{(1 - q_X)P}{0.77} - (0.003 + h)\,L, \\
\dot{N} &= u_N - q_N\frac{q_X P}{0.50} + 0.008 q_N X - hN \\
\dot{C} &= 3.45(C^* - C) - P + 0.004X + 0.00231L - hC \\
\dot{a} &= 0.32\frac{N}{0.0101 + N}(1 - a) - k_s\frac{0.020}{0.020 + N}\left(1 + 0.40\frac{I_s + u_I}{39}\right)a
\end{aligned} \quad (7)$$

2.4. Ketaknegatifan dan Neraca Massa

Ketaknegatifan solusi diperiksa melalui arah medan vektor pada batas domain keadaan, sebagaimana prinsip invariansi himpunan untuk persamaan diferensial yang dikembangkan oleh (Nagumo, 1942) . Teorema berikut menerapkan prinsip invariansi pada sistem dalam Persamaan (7). Dalam penerapannya, nilai parameter diasumsikan menghasilkan $0 \le q_X(N) \le 1$ untuk seluruh $N \ge 0$. Teorema 1 merangkum ketaknegatifan dan keterbatasan solusi. Identitas neraca pada Persamaan (8)–(9) tetap disajikan untuk memeriksa konsistensi unsur.

Teorema 1. Ketaknegatifan dan Batas Nilai Solusi: Jika $X_0, L_0, N_0, C_0 \ge 0$, $0 \le a_0 \le 1$, parameter bernilai positif, $0 \le q_X(N) \le 1$, serta kendali, intensitas cahaya, dan $C^*(s)$ terbatas, solusi Persamaan (7) tetap dalam domain biologis dan terbatas pada setiap interval $[0, T]$ berhingga.

Total karbon M_C dan nitrogen M_N pada Persamaan (8) dirumuskan berdasarkan prinsip neraca unsur dalam model mikroalga (Montoya-Vallejo et al., 2023) , bukan disalin dari persamaan sumber.

$$M_C = C + 0.50X + 0.77L, \text{ dan } M_N = N + q_N X \quad (8)$$

Penjumlahan neraca keadaan dengan bobot fraksi karbon dan nitrogen menghilangkan perpindahan internal sehingga menghasilkan identitas pada Persamaan (9). Identitas pada Persamaan (9) merupakan hasil penurunan aljabar dari Persamaan (7) dan (8), berdasarkan prinsip stoikiometri dalam pemodelan lipid (Mozumder et al., 2024) .Dari Persamaan (9) diperoleh $\dot{M}_C \le 3{,}45 C^*_{\max}$ dan $\dot{M}_N \le u_{N,\max}$. Kedua neraca memberikan batas atas berhingga pada setiap interval $[0, T]$.

$$\dot{M}_C = 3.45(C^* - C) - hM_C, \text{ dan } \dot{M}_N = u_N - hM_N \quad (9)$$

2.5. Estimasi dan Validasi

Enam parameter $p_{\max}$, k_e, k_g, q_N, k_s, dan θ_0 diestimasi dari sembilan perlakuan hari ke-14, sementara koefisien lain dipertahankan. Estimasi memakai kuadrat terkecil berbobot dan regularisasi Tikhonov lemah dengan batas parameter. Fungsi kuadrat terkecil berbobot beserta regularisasi terhadap vektor acuan p dituliskan pada Persamaan (10). Fungsi galat pada Persamaan (10) mengikuti prinsip kalibrasi model dinamis, dengan bobot dan regularisasi yang disesuaikan terhadap data sekunder (Singathia et al., 2026).

$$\hat{p} = \underset{p \in \mathcal{P}}{\arg min} \left\{ \sum_{i=1}^{9} \left[\left(\frac{\hat{B}_i - B_i}{\max(0.3, \sigma_{B,i})} \right)^2 + \left(\frac{\hat{L}_i - L_i}{\max(0.085, \sigma_{B,i})} \right)^2 \right] + 0.18^2 \left\| \frac{p - p_0}{s_{reg}} \right\|_2^2 \right\} \quad (10)$$

Pada Persamaan (10), $\hat{B}_i$ dan $\hat{L}_i$ ialah prediksi biomassa dan lipid; B_i dan L_i ialah observasi; $\sigma_{B,i}$ dan $\sigma_{L,i}$ ialah skala galat. Parameter acuan p_0 dan skala regularisasi $\mathbf{s}_{\mathrm{reg}}$ dibedakan dari fraksi gas s.

Kemampuan prediksi diuji menggunakan *leave-one-treatment-out* (LOO), yaitu delapan perlakuan untuk estimasi dan satu untuk validasi, yang diulang sembilan kali. Keteridentifikasian parameter diperiksa melalui nilai singular Jacobian residu, sedangkan model sepuluh parameter digunakan sebagai pembanding kompleksitas. Persamaan (11) mendefinisikan RMSE dan koefisien determinasi R^2 untuk mengevaluasi ketepatan prediksi biomassa dan lipid secara terpisah pada kalibrasi dan validasi (Singathia et al., 2026) . RMSE validasi pada Persamaan (11) merangkum selisih setiap prediksi perlakuan yang dikeluarkan terhadap nilai pengamatannya.

$$RMSE_Y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - Y_i\right)^2}, \text{ dan } R_Y^2 = 1 - \frac{\sum_i (\hat{Y}_i - Y_i)^2}{(Y_i - \bar{Y})^2} \quad (11)$$

2.6. Formulasi Kendali Optimal

Persamaan (12) memaksimalkan energi biodiesel parsial selama 14 hari pada volume 0,2 L dengan memperhitungkan energi lipid hasil panen setelah dikurangi energi pemrosesan, nitrogen, dan LED tambahan (Ifrim et al., 2022) . Perhitungan menggunakan nilai kalor biodiesel 37 MJ/kg, konversi lipid 80%, biaya pemrosesan 3 MJ/kg biomassa, biaya nitrogen 15 MJ/kg N, serta asumsi luas penyinaran 0,020 m² dan koefisien 4,43 µmol/J yang belum tervalidasi sebagai efikasi listrik LED. Model mengasumsikan cahaya dasar 39 µmol m^{-2} s^{-1} selama 12 jam per hari tanpa biaya listrik dan tidak mencakup seluruh kebutuhan energi fasilitas, sehingga hasilnya terbatas pada energi biodiesel parsial dalam skenario simulasi. Persamaan (7) menjadi kendala dinamika keadaan, Persamaan (12) fungsi objektif energi parsial, dan Persamaan (13) batas laju nitrogen, LED, serta panen.

$$J(u) = V[k_b L(T) - k_h(X(t) + L(T))] + \int_0^T \{V[k_b hL - k_b h(X + L) - k_N u_N] - k_I u_I\} \quad (12)$$

dengan volume V=0,2 L, koefisien yang digunakan adalah k_b=0,0296 MJ/g lipid, k_h=0,003 MJ/g biomassa, k_N=0,015 MJ/g N, dan k_I=A·43.200/(4,43·10⁶)=0,0001950 MJ per hari untuk setiap satuan µmol m^{-2} s^{-1} LED. Seluruh biomassa tersisa dipanen pada T=14 hari. Tujuan optimasi adalah memaksimalkan J, bukan memaksimalkan L(T) semata.

Batas nitrogen, LED, dan laju panen pada Persamaan (13) mendefinisikan ruang kendali simulasi.

$$0 \leq u_N \leq 0.025, \qquad 0 \leq u_I \leq 80, \qquad 0 \leq h \leq 0.13, \tag{13}$$

Fungsi Hamiltonian pada Persamaan (14) menerapkan prinsip maksimum Pontryagin untuk merumuskan syarat perlu optimalitas dengan menjumlahkan laju energi biodiesel parsial dari Persamaan (12) dan hasil kali variabel adjoin λ_j dengan fungsi dinamika lima keadaan f_j. (Fierro U. et al., 2023) .

$$H(x,u,\lambda) = V[k_b hL - k_b h(X+L) - k_N u_N] - k_I u_I + \sum_{j=1}^{5} \lambda_i f_i \tag{14}$$

Kondisi perlu Pontryagin pada Persamaan (15) mempertimbangkan fotoinhibisi dan adaptasi fotosintetik, dengan syarat terminal diturunkan dari objektif penelitian ini (Fierro U. et al., 2024).

$$\dot{\lambda_j} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \qquad j = 1, \cdots, 5. \tag{15}$$

$$\lambda_X(T) = -Vk_h, \lambda_L(T) = V(k_b - k_h), \lambda_N(T) = \lambda_C(T) = \lambda_a(T) = 0$$

Pengaruh kendali nitrogen u_N dan pemanenan h terhadap Hamiltonian dinilai melalui fungsi kendali. Turunan parsial yang menentukan kondisi perlu solusi pada batas maupun interior diberikan pada Persamaan (16).

$$\frac{\partial H}{\partial u_N} = \lambda_N - Vk_N, \frac{\partial H}{\partial h} = V[k_b L - k_h(X+L)] - \lambda_X X - \lambda_L L - \lambda_N N - \lambda_C C \tag{16}$$

2.7. Model Hibrida Dua Tahap

Berbeda dari kendali terjadwal, model hibrida pada Persamaan (17) menggunakan fungsi laju dasar dari Persamaan (7) untuk memisahkan tahap pertumbuhan kaya nitrogen dan tahap akumulasi lipid dengan nitrogen terbatas melalui waktu perpindahan τ serta perubahan keadaan seketika akibat pergantian medium. Pada tahap I, model mengizinkan pemberian nitrogen, sedangkan tahap II menghentikan nitrogen tambahan dan memungkinkan pemanenan, dengan kedua tahap menggunakan cahaya dasar 39 μmol m^{-2} s^{-1} selama 12 jam terang dan 12 jam gelap tanpa LED tambahan agar pengaruh pergantian medium dan pemanenan terhadap energi dapat dianalisis secara terpisah. Model utama hanya memuat dinamika kontinu, sedangkan model hibrida menambahkan perpindahan diskret dengan peta loncatan Persamaan (18)–(19) tanpa mengubah mekanisme biologis dasar.

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} f(y, u_N, 0,0), 0 \leq t \leq \tau \\ f(y, 0,0, h), \tau \leq t \leq T \end{cases} \tag{17}$$

Pergantian medium pada waktu τ menimbulkan perubahan seketika yang tidak dapat dinyatakan hanya melalui persamaan diferensial kontinu. Peta Ψ menghubungkan keadaan sebelum $y(\tau^-)$ dan sesudah $y(\tau^+)$ pergantian sebagaimana dinyatakan pada Persamaan (18).

$$y(\tau^+) = \Psi(y(\tau^-)) \tag{18}$$

Peta perpindahan ditetapkan dengan mempertahankan fraksi r dari biomassa nonlipid dan lipid, mengganti nitrogen terlarut menjadi N_r, dan mengatur karbon medium segar menjadi C_{eq}. Aktivitas fotosintesis tidak diubah secara seketika oleh peta loncatan. Bentuk eksplisit peta tersebut diberikan pada Persamaan (19).

$$\Psi(y) = \begin{pmatrix} rX & rL & N_r & C_{eq} & a \end{pmatrix}^T \tag{19}$$

Tahap I mensyaratkan nitrogen minimum $N_{\min}$; tahap II dimulai dengan nitrogen baru N_r. Simulasi memakai $N_{\min} = 0{,}010$ g N/L, $N_r = 0{,}001$ g N/L, retensi $r = 0{,}98$, dan biaya

medium $E_{\mathrm{sw}} = 0{,}150$ kJ. Kandidat waktu $\tau \in \{2,3,\ldots,12\}$ dipilih agar setiap tahap berlangsung minimal dua hari. Semua nilai merupakan asumsi skenario.

Persamaan (20) mengoptimalkan energi lipid setelah dikurangi biaya pemrosesan, nitrogen, dan satu pergantian medium.

$$\max J_{hyb} = E_{lipid} - E_{proses} - E_N - E_{SW}) \tag{20}$$

Perubahan karbon akibat pergantian medium mencakup pembaruan karbon terlarut dan hilangnya biomassa yang tidak tertahan, sebagaimana Persamaan (21).

$$\Delta M_C = \left(C_{eq} - C_b\right) + (r-1)(0.50X_b + 0.77L_b) \tag{21}$$

Persamaan (22) menyatakan neraca loncatan nitrogen akibat pergantian nitrogen terlarut dan kehilangan biomassa nonlipid.

$$\Delta M_N = (N_r - N_b) + (r-1)q_N X_b \tag{22}$$

Turunan peta perpindahan Ψ digunakan untuk menghubungkan variabel adjoin sebelum pergantian λ_b dengan variabel adjoin sesudah pergantian λ_p. Kondisi penyambungan variabel adjoin untuk biaya perpindahan yang tidak bergantung pada keadaan dinyatakan pada Persamaan (23).

$$\lambda_b = [D\Psi(y_b)]^T \lambda_p \tag{23}$$

Lintasan hibrida memakai RK4 langkah 0,05 hari, nitrogen tahap I 0–0,020 g N L^{-1} $hari^{-1}$, dan panen tahap II 0–0,13 $hari^{-1}$. Biaya pergantian dihitung satu kali dan tidak digunakan LED tambahan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Kalibrasi Parameter

Tabel 2 menampilkan nilai enam parameter estimasi dan batas pencariannya: kapasitas fiksasi $p_{\max}$, peredaman cahaya k_e, respons gas k_g, kebutuhan nitrogen q_N, laju stres fotosintesis k_s, serta alokasi lipid dasar θ_0. Parameter k_e, k_s, dan θ_0 mencapai batas optimasi. Bilangan kondisi Jacobian 475,78 menunjukkan sensitivitas parameter yang tidak seragam, sehingga keteridentifikasian dari sembilan perlakuan masih terbatas. Bilangan kondisi dihitung sebagai rasio nilai singular terbesar terhadap nilai singular terkecil dari Jacobian residu kalibrasi; nilai 475,78 mengindikasikan sensitivitas parameter yang tidak seragam, bukan galat prediksi.

Tabel 2. Nilai estimasi pada enam parameter model

Paremeter	Nilai hasil setimasi	Status
p_{max}	1.325466	Estimasi, batas 0,10–2,40
k_e	2.500000	Estimasi, batas 0,005–2,50
k_g	0.104883	Estimasi, batas 0,04–2,00
q_N	0.025817	Estimasi, batas 0,012–0,055
k_s	1.300000	Estimasi, batas 0,003–1,30
θ_0	0.015000	Estimasi, batas 0,015–0,450

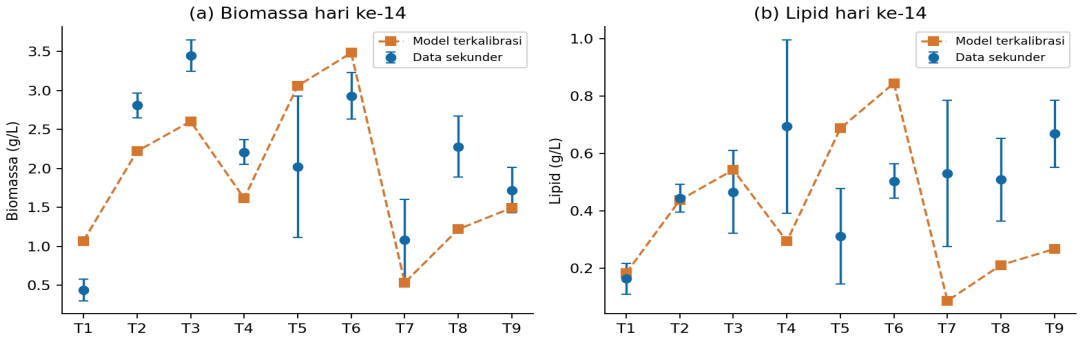
Tabel 3 membandingkan model enam dan sepuluh parameter menggunakan RMSE (akar rerata kuadrat galat, g/L) serta R^2 (koefisien determinasi) untuk biomassa dan lipid, baik saat kalibrasi maupun validasi *leave-one-treatment-out* (LOO). Penambahan parameter menurunkan RMSE lipid kalibrasi dari 0,311 menjadi 0,256 g/L, tetapi memperbesar RMSE

LOO biomassa dari 1,213 menjadi 1,413 g/L dan lipid dari 0,381 menjadi 0,388 g/L. Karena R^2 lipid tetap negatif, model enam parameter dipertahankan.

Tabel 3. Galat yang dihasilkan dari kalibari dan validasi dua model parameter

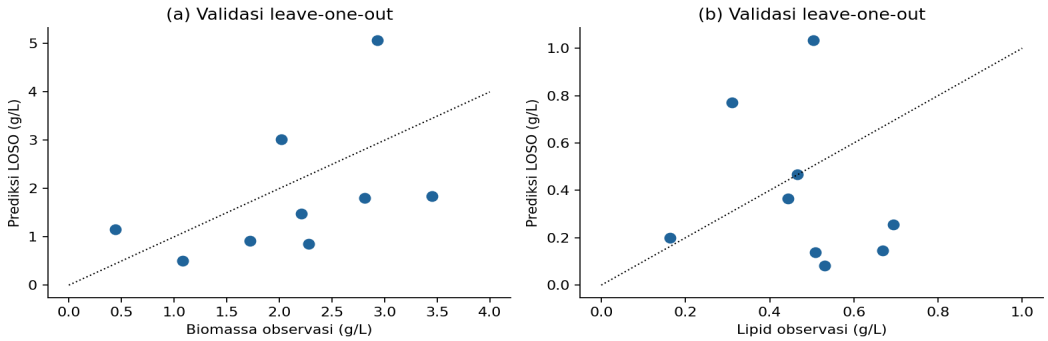
Ukuran evaluasi	Model 6 parameter	Model 10 parameter
RMSE biomassa kalibrasi (g/L)	0.721	0.825
RMSE lipid kalibrasi (g/L)	0.311	0.256
R^2 biomassa	0.333	0.126
R^2 lipid	-3.045	-1.740
LOO RMSE biomassa (g/L)	1.213	1.413
LOO RMSE lipid (g/L)	0.381	0.388

Gambar 3 membandingkan nilai biomassa total B dan lipid L (g/L) pada perlakuan T1–T9: titik dengan rentang galat merupakan observasi, sedangkan penanda terhubung menunjukkan prediksi kalibrasi. RMSE sebesar 0,721 g/L untuk B dan 0,311 g/L untuk L masih menyisakan ketidaksesuaian antarperlakuan; kecocokan lipid tidak cukup dinilai dari RMSE saja. Konsentrasi lipid yang ditampilkan sebagai observasi merupakan hasil konversi biomassa total dan persentase lipid dari (Montoya-Vallejo et al., 2023) melalui Persamaan (1), bukan pengukuran lipid independen.



Gambar 3. Biomassa dan lipid observasi dibandingkan prediksi model pada hari ke-14.

Gambar 4 memperlihatkan biomassa total B dan lipid L (g/L) pada sumbu observasi (horizontal) dan prediksi LOO (vertikal); garis diagonal menunjukkan kesesuaian sempurna. RMSE LOO meningkat menjadi 1,213 g/L untuk biomassa dan 0,381 g/L untuk lipid. Penyebaran titik dari diagonal menunjukkan keterbatasan generalisasi ke kondisi cahaya dan CO_2 yang dikeluarkan saat kalibrasi.



Gambar 4. Hasil validasi silang antar kondisi untuk biomassa dan lipid

3.1. Optimasi Kendali

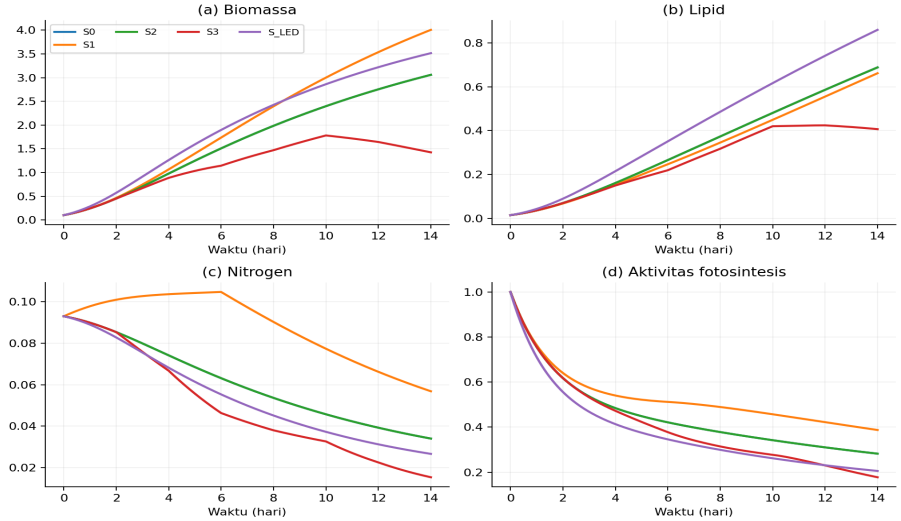
Tabel 4 membandingkan S0, S1, S2, S3, dan S_{LED} berdasarkan lipid total yang dipanen (g), biomassa diproses (g), energi biodiesel keluar (kJ), energi masukan yang diperhitungkan

(kJ), serta energi parsial J (kJ). Pada simulasi ini, S3 memberi $J = 2{,}436$ kJ atau 8,91% di atas S0 (2,237 kJ) terutama akibat berkurangnya biaya pemrosesan, sedangkan konsumsi LED pada S_{LED} menyebabkan J negatif. Besaran energi adalah keluaran model, bukan pengukuran operasional. S3 menunjukkan bahwa energi parsial tertinggi pada kebijakan kendali terjadwal (2,436 kJ), tetapi berbeda dari strategi hibrida dua tahap yang benar-benar mengganti medium.

Tabel 4. Galat yang dihasilkan dari kalibari dan validasi dua model parameter

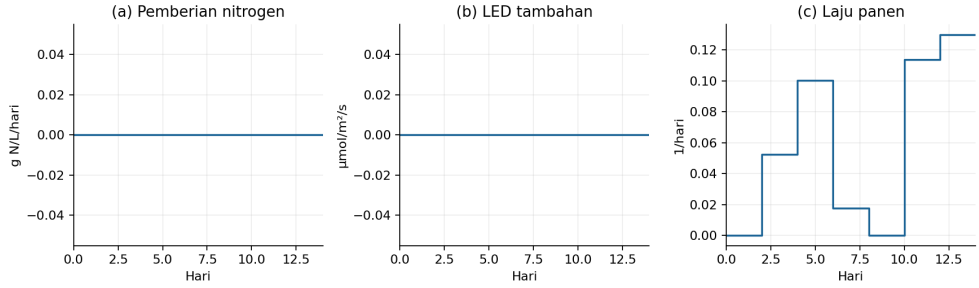
Skenario	Total lipid (g)	Biomassa (g)	Energi hasil (kJ)	Energi masuk (kJ)	Energi parsial (kJ
S0	0.1376	0.6118	4.072	1.835	2.237
S1	0.1323	0.8015	3.915	2.548	1.366
S2	0.1336	0.6118	4.072	1.835	2.237
S3	0.1337	0.5072	3.958	1.522	2.436
S_LED	0.1718	0.7032	5.085	84.024	-78.939

Gambar 5 memperlihatkan waktu kultivasi t (hari) terhadap biomassa total $B = X + L$ (g/L), lipid L (g/L), nitrogen N (g N/L), dan aktivitas fotosintesis a (tak berdimensi) untuk S0, S1, S2, S3, dan S_{LED}. S1 menaikkan biomassa melalui nitrogen tambahan, tetapi tidak menghasilkan energi parsial tertinggi karena biaya pemrosesan ikut meningkat.



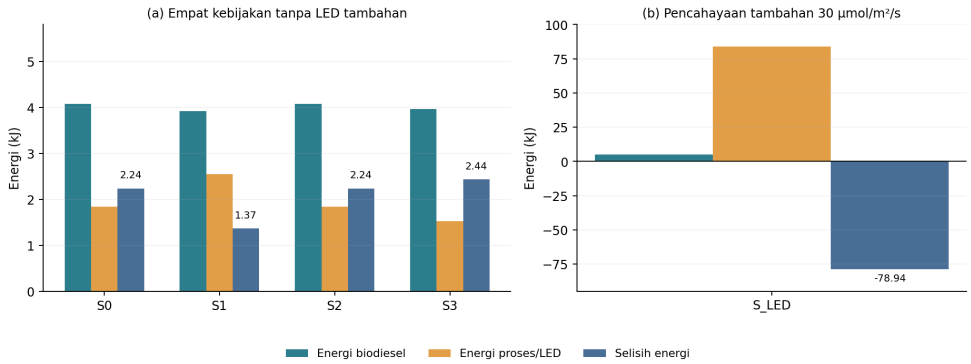
Gambar 5. Lintasan variabel keadaan pada lima skenario kendali

Gambar 6 menampilkan tiga kendali S3 terhadap waktu t (hari): laju suplai nitrogen u_N (g N L^{-1} $hari^{-1}$), LED tambahan u_I (µmol m^{-2} s^{-1}), dan laju panen h ($hari^{-1}$). Solusi memilih $u_N = u_I = 0$ dan mengubah h menurut blok dua hari. Karena tidak ada pergantian medium, keunggulan energi S3 berasal dari jadwal pemanenan parsial.



Gambar 6. Profil kendali skenario S3 pada interval dua hari.

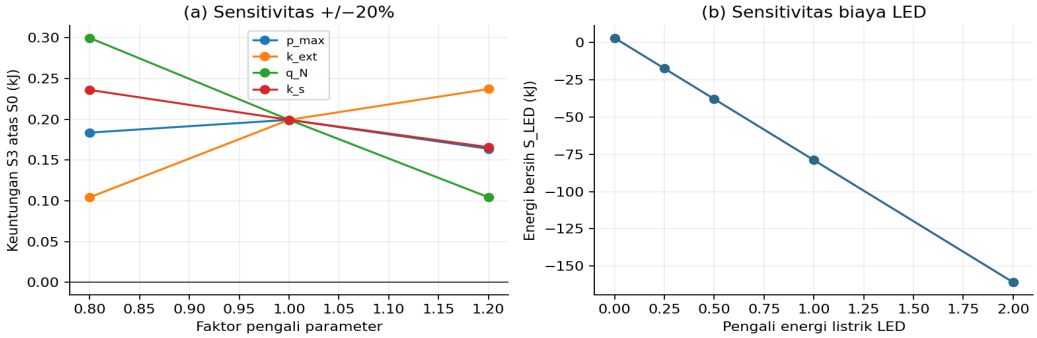
Gambar 7 memisahkan energi biodiesel keluar, energi masukan, dan selisihnya sebagai energi parsial J (seluruhnya kJ) untuk S0–S3 serta S_{LED} pada panel berskala berbeda. Pada S_{LED}, energi biodiesel 5,085 kJ tidak menutup konsumsi LED 81,914 kJ, sehingga $J = -78{,}939$ kJ. Nilai negatif menunjukkan penalti listrik, bukan ketiadaan lipid.



Gambar 7. Komponen energi skenario S0–S3 dan S_LED dengan skala panel berbeda.

3.2. Analisis Sensitivitas

Gambar 8(a) menunjukkan selisih energi parsial $J_{S3} - J_{S0}$ (kJ) ketika $p_{\max}$ (fiksasi karbon), k_e (peredaman cahaya, tertulis k_ext pada legenda), q_N (kebutuhan nitrogen), dan k_s (stres fotosintesis) dikalikan 0,8; 1,0; atau 1,2. Panel (b) menunjukkan $J_{S_{LED}}$ (kJ) terhadap pengali biaya listrik LED 0–2. Keuntungan S3 berubah bersama parameter, sedangkan biaya LED yang meningkat menurunkan energi parsial. Keuntungan energi S3 relatif terhadap S0 berubah bersama parameter, sehingga keputusan optimal harus mempertimbangkan ketidakpastian estimasi dan asumsi biaya pencahayaan.



Gambar 8. Sensitivitas selisih energi S3–S0 dan biaya listrik LED.

3.3. Simulasi Kultivasi Dua Tahap

Model hibrida pada Persamaan (17)–(20) menerapkan penggantian nitrogen dan karbon serta retensi biomassa pada τ, dengan biaya pergantian medium eksplisit. Dua tahap disimulasikan untuk memisahkan pembentukan biomassa pada kondisi kaya nitrogen dan peningkatan alokasi karbon menuju lipid setelah nitrogen dibatasi.

Sebelas kandidat $\tau = 2{,}3, \ldots, 12$ diuji dengan kendali nitrogen tahap I dan panen tahap II. Semua kandidat memilih $u_N^* = 0$ dan $h^* = 0$. Nitrogen awal menjaga $N(t)$ di atas $N_{\min} = 0{,}010$ selama tahap I, sehingga nitrogen tambahan hanya meningkatkan biaya; panen akhir lebih menguntungkan daripada panen kontinu pada skenario yang diuji.

Pada pergantian hari ke-12, pemberian nitrogen $0{,}005\ \mathrm{g\,N\,L^{-1}\,hari^{-1}}$ dengan $h = 0$ menurunkan energi parsial dari 2,07556 ke 1,50886 kJ. Peningkatan panen menjadi h dengan

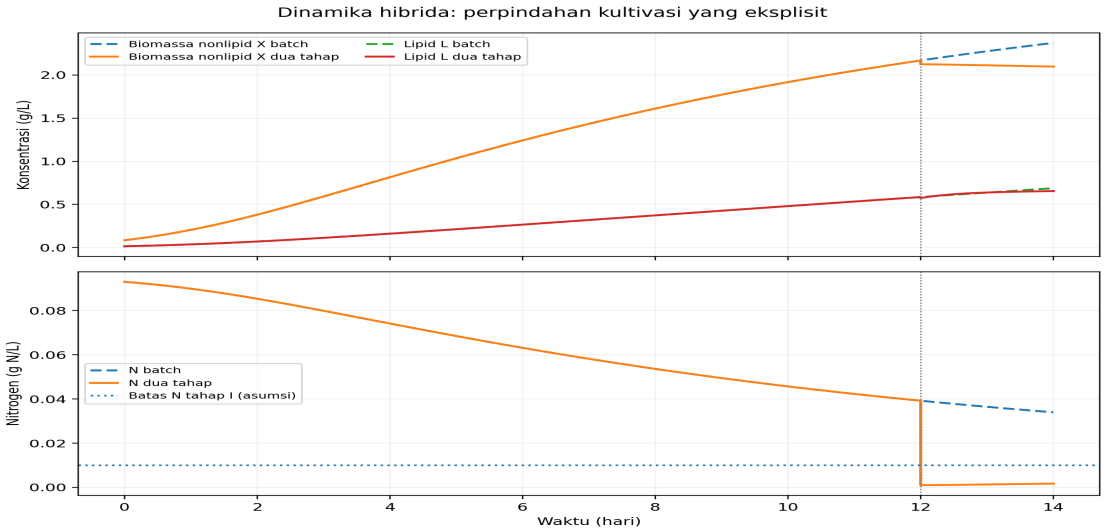
$u_N = 0$ memberikan 2,07444 kJ. Hasil ini mendukung solusi pada batas kendali yang diuji, bukan membuktikan optimum global.

Tabel 5 memuat waktu perpindahan τ (hari), nitrogen minimum tahap I $N_{\min,aktual}$ (g N/L), lipid total yang dipanen (g), energi biodiesel (kJ), dan energi parsial J (kJ). Pada sebelas kandidat $\tau = 2, \ldots, 12$, lipid terpanen dan J meningkat, sedangkan nitrogen minimum menurun. Nilai J tertinggi, 2,076 kJ, terjadi pada hari ke-12, yaitu batas akhir kandidat, bukan bukti optimum waktu kontinu.

Tabel 5. Nitrogen, lipid, dan energi menurut waktu perpindahan

$hari$ (τ)	Minimum N tahap I (g N/L)	Lipid dipanen (g)	Energi biodisel (kJ)	Energi parsial (kJ)
2	0.0853	0.0413	1.223	0.740
3	0.0799	0.0552	1.634	0.992
4	0.0741	0.0671	1.986	1.184
5	0.0685	0.0772	2.285	1.328
6	0.0631	0.0860	2.547	1.445
7	0.0582	0.0941	2.785	1.547
8	0.0536	0.1017	3.009	1.644
9	0.0495	0.1090	3.228	1.743
10	0.0457	0.1163	3.444	1.847
11	0.0423	0.1237	3.661	1.959
12	0.0392	0.1310	3.877	2.076

Gambar 9 membandingkan lintasan waktu t (hari) untuk biomassa nonlipid X dan lipid L (g/L), serta nitrogen tersedia N (g N/L), pada batch dan kultur dua tahap. Saat $\tau = 12$ hari, peta loncatan mengatur nitrogen baru 0,001 g N/L serta mempertahankan 98% biomassa. Perubahan sesaat pada lintasan dua tahap menunjukkan dampak penggantian medium dan merupakan prediksi numerik, bukan pengamatan



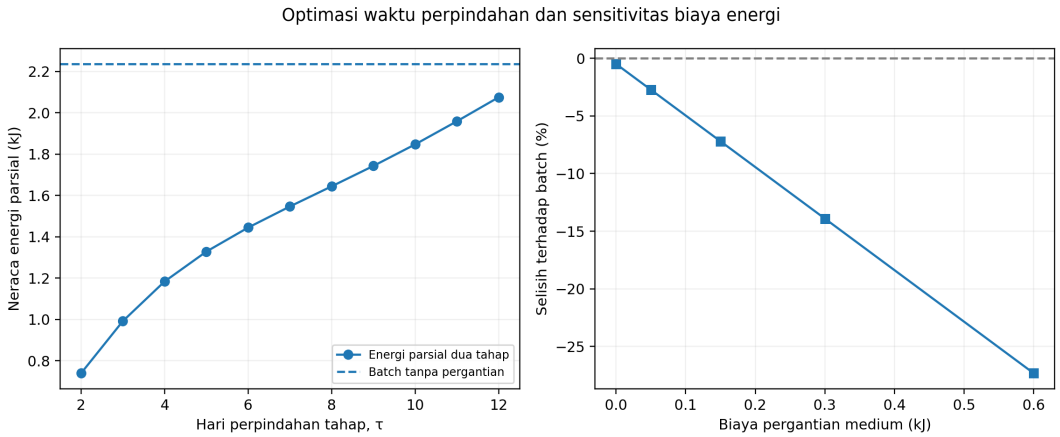
Gambar 9. Dinamika biomassa, lipid, dan nitrogen pada batch serta kultivasi dua tahap.

Tabel 6 membandingkan batch S0 dan kultivasi dua tahap menurut waktu perpindahan (hari), lipid dipanen (g), energi biodiesel (kJ), biaya pemrosesan (kJ), biaya pergantian medium (kJ), energi parsial J (kJ), dan perubahan relatif terhadap batch (%). Meskipun biaya pemrosesan dua tahap lebih kecil, kehilangan lipid dan biaya pergantian 0,150 kJ membuat J turun dari 2,237 menjadi 2,076 kJ, atau 7,20%.

Tabel 6. Kondisi operasi dan neraca energi dua strategi kultivasi

Indikator	Batch S0	Dua tahap kultivasi
Waktu perpindahan (hari)	Tidak ada	12
Lipid yang dipanen (g)	0.1376	0.1310
Energi biodiesel (kJ)	4.072	3.877
Biaya pemrosesan (kJ)	1.835	1.651
Biaya pergantian medium (kJ)	0.000	0.150
Energi parsial (kJ)	2.237	2.076
Perubahan relatif terhadap S0	0.00%	-7.20%

Gambar 10 memperlihatkan energi parsial dua tahap J (kJ) terhadap waktu perpindahan τ (hari), dengan garis acuan batch $J_{S0} = 2{,}237$ kJ. Grafik biaya pergantian medium menampilkan selisih relatif dua tahap terhadap batch (%) ketika biaya pergantian medium (kJ) diubah. Tanpa biaya tersebut selisih pada hari ke-12 sekitar −0,49%, tetapi dengan biaya 0,150 kJ menjadi −7,20%; biaya medium menentukan kelayakan relatif dua tahap dalam skenario ini. Biaya pergantian medium dihitung satu kali dan tetap untuk setiap kandidat waktu, sehingga mengurangi energi parsial tanpa mengubah urutan kandidat. Hari ke-12 terbaik hanya dalam rentang uji. Tanpa biaya pergantian medium, energi dua tahap masih sekitar 0,49% di bawah batch akibat faktor lain yang tetap diasumsikan.



Gambar 10. Energi parsial menurut waktu perpindahan dan biaya pergantian medium.

4. SIMPULAN

Penelitian ini merumuskan model dinamis nonlinier lima keadaan untuk biomassa nonlipid, lipid, nitrogen, karbon, dan aktivitas fotosintesis. Pergantian medium direpresentasikan oleh peta loncatan. Analisis matematis membuktikan ketaknegatifan dan konsistensi neraca massa di sepanjang tahap serta saat transisi. Pada simulasi 14 hari, perpindahan hari ke-12 memberikan energi parsial tertinggi di antara kandidat hari ke-2 sampai ke-12, sebesar 2,076 kJ atau 7,20% lebih rendah daripada batch acuan (2,237 kJ). Pemberian nitrogen dan panen kontinu tidak memperbaiki objektif hibrida pada batas serta asumsi biaya yang diuji. Pemilihan waktu tidak cukup didasarkan pada lipid tanpa mempertimbangkan retensi biomassa dan energi pergantian medium. Galat validasi antarperlakuan masih besar, khususnya untuk lipid. Pengembangan selanjutnya memerlukan pengamatan berkala nitrogen,

lipid, dan fotosintesis, disertai pengukuran retensi biomassa dan energi pergantian medium agar keandalan serta kelayakan operasional dapat dievaluasi.

5. DAFTAR PUSTAKA

Belohlav, V., Jirout, T., Uggetti, E., Díez-Montero, R., & García, J. (2024). Computational Fluid Dynamics Coupled to Biokinetic Models: Numerical Methodology for Microalgae Cultivation Optimization. *Process Safety and Environmental Protection*, *181*, 367–376. https://doi.org/10.1016/j.psep.2023.11.038.

Chambonniere, P., Dollon, E., Dimitriades-Lemaire, A., Sassi, J.-F., & Delrue, F. (2026). Scalable Model Development of Carbon Photosynthetic Assimilation and Partitioning in A Green Microalga during Nitrogen Starvation. *Bioresource Technology*, *441*, 133585. https://doi.org/10.1016/j.biortech.2025.133585.

del Rio-Chanona, E. A., Liu, J., Wagner, J. L., Zhang, D., Meng, Y., Xue, S., & Shah, N. (2018). Dynamic Modeling of Green Algae Cultivation in A Photobioreactor for Sustainable Biodiesel Production. *Biotechnology and Bioengineering*, *115*(2), 359–370. https://doi.org/10.1002/bit.26483.

Fierro U., J. I., Chachuat, B., & Bernard, O. (2024). Optimal Control of Photobioreactor Accounting for Photoinhibition and Photoacclimation. *IFAC-PapersOnLine*, *58*(14), 157–162. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2024.08.330.

Fierro U., J. I., Djema, W., & Bernard, O. (2023). Optimal Control of Microalgae Culture Accounting for Photoinhibition and Light Attenuation. *IFAC-PapersOnLine*, *56*(2), 7222–7227. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2023.10.329.

Gu, W., Theau, E., Anderson, A. W., Fletcher, D. F., Kavanagh, J. M., & McClure, D. D. (2023). A Modelling Workflow for Quantification of Photobioreactor Performance. *Chemical Engineering Journal*, *477*, 147032. https://doi.org/10.1016/j.cej.2023.147032.

Ifrim, G. A., Titica, M., Horincar, G., Antache, A., Baicu, L., Barbu, M., & Guzmán, J. L. (2022). Model Based Optimal Control of The Photosynthetic Growth of Microalgae in A Batch Photobioreactor. *Energies*, *15*(18), 6535. https://doi.org/10.3390/en15186535.

Kivanc, S., Beykal, B., Deliismail, O., & Sildir, H. (2025). Dynamic and Stochastic Optimization of Algae Cultivation Process. *Computers & Chemical Engineering*, *198*, 109087. https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2025.109087.

Li, L., Shafie, Z. M. H. M., Huang, T., Lau, R., & Wang, C.-H. (2023). Multiphysics Simulations of Concentric-Tube Internal Loop Airlift Photobioreactors for Microalgae Cultivation. *Chemical Engineering Journal*, *457*, 141342. https://doi.org/10.1016/j.cej.2023.141342.

Liu, Y., Du, Z., Wu, P., & Zhang, L. (2024). Optimization of Stage Conversion Time and Modification of Cell Metabolism to Enhance Lipid Production of Auxenochlorella Pyrenoidosa in Two-Stage Cultivation. *Bioresource Technology*, *395*, 130409. https://doi.org/10.1016/j.biortech.2024.130409.

Liu, Y., Xia, R., Wang, Y., Zhao, Y., & Ju, M. (2025). Life Cycle Environmental Impact Assessment of Microalgae Biodiesel Derived from Different Processes. *Industrial Crops and Products*, *233*, 121381. https://doi.org/10.1016/j.indcrop.2025.121381.

Ma, S., Huang, Y., Zhu, X., Xia, A., Zhu, X., & Liao, Q. (2024). Growth-Based Dynamic Light Transmission Modeling and Optimization in Microalgal Photobioreactors for High Efficiency CO_2 Fixation. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, *197*, 114414. https://doi.org/10.1016/j.rser.2024.114414.

Montoya-Vallejo, C., Guzmán Duque, F. L., & Quintero Díaz, J. C. (2023). Biomass and Lipid Production by The Native Green Microalgae Chlorella Sorokiniana in Response to Nutrients, Light Intensity, And Carbon Dioxide: Experimental and Modeling Approach. *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*, *11*, 1149762. https://doi.org/10.3389/fbioe.2023.1149762.

Mozumder, M. S. I., Rahat, S. M. H. S., Islam, M. M., Mehjabin, F., Mahmud, F., Basak, R., & Rahman, M. M. (2024). Model Development and Process Evaluation for Algal Growth and Lipid Production. *Biochemical Engineering Journal*, *212*, 109485. https://doi.org/10.1016/j.bej.2024.109485.

Nagumo, M. (1942). Über die Lage der Integralkurven Gewöhnlicher Differentialgleichungen. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*, *24*, 551–559. https://doi.org/10.11429/ppmsj1919.24.0_551.

Papapanagiotou, G., Samara, C., & Chatzidoukas, C. (2024). Managing The Interactions of Illumination, Nitrogen, and Sodium Bicarbonate for Autotrophic Biomass Production and Macromolecules Accumulation in The Microalga Chlorella Sorokiniana. *Algal Research*, *80*, 103550. https://doi.org/10.1016/j.algal.2024.103550.

Singathia, A., Kumar, R. R., Sarkar, D., & Sen, R. (2026). A Dynamic Mathematical Model for Uncertainty-Aware Prediction and Optimization of Microalgal Mixotrophic Cultivation in A Photobioreactor. *Biochemical Engineering Journal*, *236*, 110366. https://doi.org/10.1016/j.bej.2026.110366.

Six, A., Chambonnière, P., Alvarez, P., Fon-Sing, S., Lancelon-Pin, C., Putaux, J.-L., Sassi, J.-F., Li-Beisson, Y., & Fleury, G. (2026). Microalgae, Sunlight, and Starch: Low Cell Concentration is Optimal for Outdoor Production under Nutrient Stress. *Bioresource Technology*, *443*, 133840. https://doi.org/10.1016/j.biortech.2025.133840.

Taborda, T. M., Pires, J. C. M., Badenes, S. M., & Lemos, F. (2026). Constructing and Validating a New Model for the Light Distribution Inside An Outdoor Tubular Photobioreactor for The Production of Photosynthetic Microorganisms. *Algal Research*, *95*, 104669. https://doi.org/10.1016/j.algal.2026.104669.

Tripathi, G., Dubey, P., Osama, K., Ahmad, S., Irum, Singh, V., Farooqui, A., Vamanu, E., Rai, S. N., & Mishra, V. (2025). Two-Stage Cultivation of Microalga for Sustainable Biofuel Production. *Green Chemistry Letters and Reviews*, *18*(1), 2543909. https://doi.org/10.1080/17518253.2025.2543909.

Trivedi, J., Agrawal, D., Atray, N., & Ray, A. (2022). Enhanced Lipid Production in Scenedesmus Obliquus via Nitrogen Starvation in A Two-Stage Cultivation Process and Evaluation for Biodiesel Production. *Fuel*, *316*, 123418. https://doi.org/10.1016/j.fuel.2022.123418.

Vijayan, J., Wase, N., Liu, K., Morse, W., Zhang, C., & Riekhof, W. R. (2024). ROS-Mediated Thylakoid Membrane Remodeling and Triacylglycerol Biosynthesis under Nitrogen Starvation in The Alga Chlorella Sorokiniana. *Frontiers in Plant Science*, *15*, 1418049. https://doi.org/10.3389/fpls.2024.1418049.

Wang, D., Lai, Y.-C., Karam, A. L., de los Reyes, F. L., & Ducoste, J. J. (2019). Dynamic Modeling of Microalgae Growth and Lipid Production under Transient Light and Nitrogen Conditions. *Environmental Science & Technology*, *53*(19), 11560–11568. https://doi.org/10.1021/acs.est.9b02908.