



Analisis Kestabilan Lokal Model Transmisi Demam Berdarah *Dengue*

Arista Fitri Diana^{1*}, Muhammad Ibnu Hajar², Zakaria Bani Ikhtiyar³, Lathifatul Aulia⁴

^{1,2,3,4}Institut Teknologi Statistika dan Bisnis Muhammadiyah Semarang

*arista.fitri@itesa.ac.id

ABSTRAK

Penularan demam berdarah *dengue* di Indonesia menunjukkan jumlah yang cukup besar, hingga Maret 2024 kasus DBD dilaporkan mencapai 53.131 kasus dengan kasus kematian mencapai 404. Pada artikel ini, membahas tentang model dinamik interaksi antara manusia dan nyamuk *Aedes aegypti*. Pada penelitian ini menggunakan model dinamik SEIRD (*Susceptible Exposed Infected Recovered Deceased*). Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan kestabilan transmisi demam berdarah *dengue* sehingga dapat kita analisis perkembangan model epidemi dalam sudut pandang ilmu matematika. Adapun bilangan reproduksi dasar diperoleh dari metode matriks NGM (Next Generation Matrix), sedangkan analisis kestabilan menggunakan metode kriteria Routh-Hurwitz. Selanjutnya dari model dinamik, diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan endemic dan non-endemic (bebas penyakit). Titik kesetimbangan kemudian dianalisis kestabilannya. Dalam penelitian ini, kestabilan model yang dianalisis adalah kestabilan lokal. Apabila nilai bilangan reproduksi dasar $\mathfrak{R}_0 > 1$ satu maka titik endemic bersifat stabil asimtotik lokal dan sebaliknya. Lebih jauh lagi, dilakukan analisis numerik untuk menjelaskan penyebaran penyakit demam berdarah *dengue*. Sehingga dapat diketahui penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* bersifat endemic atau non-endemic beserta kestabilan penyebarannya. Setelah diketahui penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* maka dapat dijadikan bahan pertimbangan dalam pengambilan keputusan terkait usaha penanganan kasus demam berdarah *dengue*. Apabila kasus penyebaran penyakit DBD bersifat endemic, maka diperlukan strategi yang lebih serius dalam penanganan kasus DBD, sehingga kasus DBD dapat dikendalikan.

Kata Kunci: model dinamik SEIRD, model epidemi, titik kesetimbangan, kestabilan lokal, Routh Hurwitz.

ABSTRACT

Dengue fever transmission in Indonesia has an advanced amount, as of March 2024 dengue fever cases were reported to have reached 53.131 cases with deaths reaching 404 cases. In this article, dynamic model of interaction between human and Aedes aegypti mosquitos is learned. The SEIRD (Susceptible, Exposed, Infected, Recovered, Deceased) model is used in this article. The purpose in this model is to describe the stability of dengue transmission, so that we can analyze the developed of epidemic model in mathemtic field. Using NGM method to analyze basic reproduction number and applying Routh-Hurwitz criteria method to show the local stability of model. Then, two equilibrium points, called endemic and non-endemic equilibrium points, are obtained. The result of basic reproduction number is described the stability analysis. In this research, the stability of the model analyzed is local stability. If basic reproduction $\mathfrak{R}_0 > 1$, the endemic equilibrium point is locally asymptotically stable and otherwise. Local stability analysis at the equilibrium point is determined through parameter analysis. Furthermore, numerical simulations are carried out by fitting the data to obtaine the result of the parameters. The results of numerical simulations explaine the spread of dengue transmission is endemic or non-endemic and the stability of its spread. Once the spread of dengue transmission is known, it can be taken into consideration in making decisions regarding efforts to handle dengue fever cases. If cases of the spread dengue transmission are endemic, more seroius strategy is needed in handling dengue cases, so that dengue cases can be controlled.

Keywords: dynamic model SEIRD, epidemic model, equilibrium point, local stability, Routh Hurwitz

1. PENDAHULUAN

Demam berdarah merupakan penyakit yang dapat mengancam jiwa. Penyakit ini disebabkan oleh infeksi virus *dengue* yang ditularkan melalui gigitan nyamuk *Aedes aegypti* (Nurbaya, 2019). Penderita yang terinfeksi akan mengalami gejala berupa demam ringan hingga tinggi, disertai sakit kepala, nyeri pada mata, otot dan persendian, bahkan pendarahan spontan (M. Faid, 2019). Terdapat empat jenis virus demam berdarah. Di Indonesia, kasus demam berdarah masih terus meningkat, hampir 10% diantaranya meninggal. Negara-negara beriklim tropis dan subtropis mempunyai risiko tinggi penularan virus, terutama pada musim hujan yang lembab (Dewi, 2015). Organisasi kesehatan dunia memprediksikan setiap tahunnya terdapat 50-100 juta kasus infeksi virus *dengue* di seluruh dunia. Demam berdarah akut disertai dengan pendarahan menyebabkan syok yang dapat mengakibatkan kematian (Agustina, 2023), penyakit ini terjadi secara akut dan menyerang baik orang dewasa maupun anak-anak di bawah usia 15 tahun (Podung et al., 2021). Jadi kasus DBD harus segera mendapat pengobatan yang tepat agar penularan virus DBD tidak semakin meluas. Oleh karena itu, kasus DBD ini tidak bisa diabaikan begitu saja, sehingga kita harus mengetahui pola penyebaran virus DBD. Dalam pemodelan matematika, berbagai penelitian terdahulu telah mengkaji model penularan demam berdarah, beberapa diantaranya adalah model SIR-SI yang dikemukakan oleh (Murugadoss et al., 2023), kemudian model SIR dikembangkan oleh (B. Wang et al., 2023), yang memasukkan variabel terpapar pada manusia menjadi model SEIR-SI. Kemudian dengan (R. Pandey et al., 2023) menambahkan variabel terpapar pada nyamuk sehingga diperoleh model SEIR-SEI. Dalam penelitian ini, penulis membahas pengembangan model SEIR-SEI yang dikemukakan oleh (R. Pandey et al., 2023) dengan menambahkan variabel kematian pada penyebaran penyakit demam berdarah. Penambahan variabel kematian pada penelitian ini dengan mempertimbangkan kasus DBD yang telah menyebabkan kematian. Pemodelan penyakit dengan adanya kasus kematian dapat membentuk satu variabel kematian seperti kasus penyebaran virus covid-19 yang memiliki model dinamik SEQIRD (*Suceptible-Exposed-Quarantined-Infected-Recovered-Deceased*) (Kartono et al., 2024). Sehingga penambahan variabel kematian dalam penelitian ini dapat menjadi keterbaruan model dari model penyakit DBD sebelumnya. Selain itu, kita juga melakukan analisis kestabilan pada model untuk menghasilkan dua titik kesetimbangan yaitu, titik kesetimbangan endemik dan titik kesetimbangan non-endemik. Selanjutnya dengan menggunakan bilangan reproduksi dasar dan kriteria Routh Hurwitz, akan di analisis kestabilan lokal. Hasil \mathcal{R}_0 dapat digunakan untuk menentukan kondisi kestabilan model. Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik untuk menunjukkan dinamika penyebaran penyakit demam berdarah, dengan data yang digunakan merupakan data sekunder yang merujuk pada jurnal model dinamik penyebaran DBD di Nepal (R. Pandey et al., 2023).

2. METODE

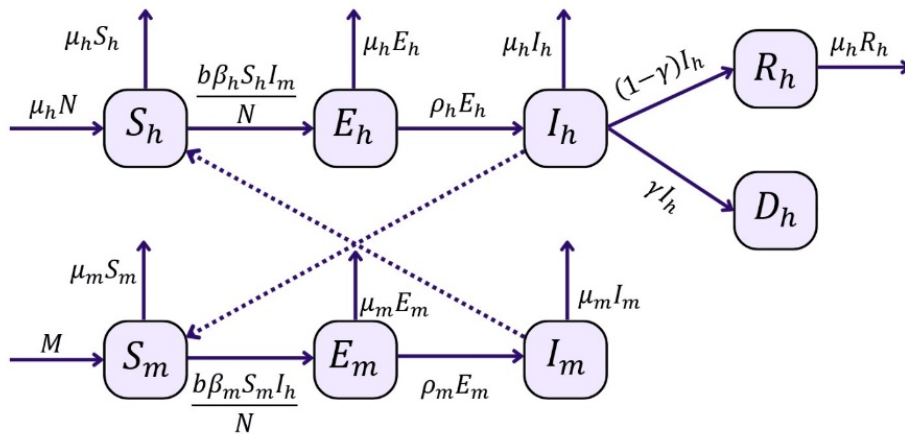
Metode penelitian yang digunakan dalam artikel ini yaitu dimulai dari formulasi model, kemudian dilanjutkan dengan pencarian titik kesetimbangan, selanjutnya dilakukan analisis titik kesetimbangan model dengan metode Routh Hurwitz dan Bilangan Reproduksi Dasar.

2.1. Formulasi Model

Berdasarkan proses penyebaran dan penularan virus *dengue* , dikembangkan model SEIR (*Suceptible-Exposed-Infected-Recovered*) dengan menambahkan variabel meninggal (*Deceased*) pada manusia dan mengembangkan moel SI (*Susceptible-Infected*) dengan menambahkan variabel terpapar pada nyamuk. Pada model ini menggunakan 5 subpopulasi, yaitu subpopulasi manusia rentan (*Suceptible*), subpopulasi manusia terpapar (*Exposed*), subpopulasi manusia terinfeksi (*Infected*), subpopulasi manusia sembuh (*Recovered*), dan subpopulasi manusia meninggal (*Deceased*). Selanjutnya untuk populasi nyamuk, digunakan 3 subpopulasi yaitu nyamuk rentan (*Suceptible*), subpopulasi nyamuk terpapar (*Exposed*), dan subpopulasi nyamuk terinfeksi (*Infected*). Beberapa asumsi yang digunakan dalam formulasi model matematika yaitu,

- a) Populasi nyamuk dan manusia tertutup
- b) Hanya nyamuk dan manusia yang terinfeksi yang dapat menyebarkan penyakit
- c) Semua populasi nyamuk yang terinfeksi akan mati

Berikut diagram model yang digunakan dalam artikel ini,



Gambar 1. Deskripsi Model SEIRD-SEI

Tabel 1. Deskripsi Parameter

No	Persentase Ketuntasan
μ_h	Laju kematian lamai manusia
β_h	Laju Peluang Transmisi Nyamuk-Manusia
ρ_h	Laju Inkubasi Manusia
γ_h	Laju Manusia Terinfeksi menjadi Meninggal
b	Laju Gigitan Nyamuk
μ_m	Laju Kemmatian Alami Nyamuk
β_m	Laju Peluang Transmisi Manusia-Nyamuk
ρ_m	Laju Inkubasi Nyamuk
$1 - \gamma_{h_2}$	Laju Manusia Terinfeksi menjadi Sembuh

Tabel 2. Deskripsi Variabel

No	Persentase Ketuntasan
S_h	Subpopulasi manusia rentan
E_h	Subpopulasi manusia terpapar
I_h	Subpopulasi manusia terinfeksi
R_h	Subpopulasi manusia sembuh
D_h	Subpopulasi manusia meninggal
S_m	Subpopulasi nyamuk rentan
E_m	Subpopulasi nyamuk terpapar
I_m	Subpopulasi nyamuk terinfeksi

Pengembangan model matematika mengikuti model (R. Pandey *et al.*, 2023). Model dari (R. Pandey *et al.*, 2023) memberikan model SEIR untuk manusia dan model SEI untuk nyamuk. Penelitian ini mengembangkan model dengan menambahkan variabel meninggal pada manusia dan variabel terpapar pada nyamuk, sehingga menjadi model transmisi demam berdarah dengue SEIRD-SEI. Jadi dapat diperoleh formulasi model dinamik sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\frac{dS_h}{dt} &= \mu_h N - \frac{b\beta_h S_h I_m}{N} - \mu_h S_h \\ \frac{dE_h}{dt} &= \frac{b\beta_h S_h I_m}{N} - \rho_h E_h - \mu_h E_h \\ \frac{dI_h}{dt} &= \rho_h E_h - (\gamma + \mu_h) I_h - (1 - \gamma) I_h \\ \frac{dR_h}{dt} &= (1 - \gamma) I_h - \mu_h R_h \\ \frac{dD_h}{dt} &= \gamma I_h \\ \frac{dS_m}{dt} &= M - \frac{b\beta_m S_m I_h}{N} - \mu_m S_m \\ \frac{dE_m}{dt} &= \frac{b\beta_m S_m I_h}{N} - (\rho_m + \mu_m) E_m \\ \frac{dI_m}{dt} &= \rho_m E_m + \mu_m I_m\end{aligned}$$

Dengan kondisi awal $S_h(0) \geq 0, E_h(0) \geq 0, I_h(0) \geq 0, R_h(0) \geq 0, D_h(0) \geq 0, S_m(0) \geq 0, E_m(0) \geq 0, I_m(0) \geq 0$ dan parameter yang diberikan pada tabel 1.

2.2. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan adalah kondisi dimana tidak terjadi perubahan pada setiap populasi dalam waktu yang lama, sehingga sistem dinamik dari model dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_h}{dt} = \mu_h N - \frac{b\beta_h S_h I_m}{N} - \mu_h S_h = 0 \\ \frac{dE_h}{dt} = \frac{b\beta_h S_h I_m}{N} - \rho_h E_h - \mu_h E_h = 0 \\ \frac{dI_h}{dt} = \rho_h E_h - (\gamma + \mu_h) I_h - (1 - \gamma) I_h = 0 \\ \frac{dR_h}{dt} = (1 - \gamma) I_h - \mu_h R_h = 0 \\ \frac{dD_h}{dt} = \gamma_h I_h = 0 \\ \frac{dS_m}{dt} = M - \frac{b\beta_m S_m I_h}{N} - \mu_m S_m = 0 \\ \frac{dE_m}{dt} = \frac{b\beta_m S_m I_h}{N} - (\rho_m + \mu_m) E_m = 0 \\ \frac{dI_m}{dt} = \rho_m E_m + \mu_m I_m = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

Sistem pada model (1) menghasilkan 2 titik kesetimbangan, yaitu titik endemik (EE) dan titik non-endemik/bebas penyakit (DFE). Berikut kedua titik kesetimbangan dari model (1).

Titik Non-endemik :

$$\mathcal{E}_0(S_{h0}, E_{h0}, I_{h0}, R_{h0}, S_{m0}, E_{m0}, I_{m0}) = \left(N, 0, 0, 0, \frac{M}{\mu_m}, 0, 0 \right)$$

Titik Endemik :

$$\mathcal{E}^*(S_h^*, E_h^*, I_h^*, R_h^*, S_m^*, E_m^*, I_m^*)$$

Dimana,

$$\begin{aligned} S_h^* &= \frac{N^2 \mu_m EC}{\beta_m \rho_h b (Mb \beta_h \rho_m + N \rho_m \mu_m \mu_h + N \mu_m^2 \mu_h)} \\ E_h^* &= \frac{(N \mu_h (Mb^2 \beta_h \rho_m \beta_m - \mu_m A))}{\beta_m \rho_h b (Mb \beta_h \rho_m C + A - B)} \\ I_h^* &= \frac{(N \mu_h (Mb^2 \beta_h \rho_m \beta_m - \mu_m A))}{\beta_m b (\mu_h + 1) (Mb \beta_h \rho_m C + A - B)} \\ R_h^* &= \frac{(N (1 - \gamma) (Mb^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m - A))}{\beta_m b (\mu_h + 1) (Mb \beta_h \rho_m C + A - B)} \\ E_m^* &= \frac{(\mu_h (Mb^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m - A))}{\rho_m C (D + b^2 \beta_h \mu_h \rho_h \beta_m)} \\ I_m^* &= \frac{(\mu_h (Mb^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m - A))}{\mu_m C (D + b^2 \beta_h \mu_h \rho_h \beta_m)} \\ S_m^* &= \frac{(\mu_h + 1) (Mb \beta_h \rho_m C + A - B)}{\beta_h \rho_m b E} \end{aligned}$$

Dengan,

$$\begin{aligned} A &= N \mu_m (\rho_m \mu_h^2 + \rho_m \mu_h \rho_h + \mu_m \mu_h^2 + \mu_m \mu_h \rho_h + \rho_m \mu_h + \rho_m \rho_h + \mu_m \mu_h + \mu_m \rho_h) \\ B &= N \mu_m (\rho_m \mu_h + \rho_m \rho_h + \mu_m \mu_h + \mu_m \rho_h) \\ C &= \mu_h + \rho_h \\ D &= \beta_h b \mu_m (\mu_h^2 + \mu_h \rho_h + \mu_h + \rho_h) \\ E &= \beta_h b \mu_m (b \mu_h \rho_h \beta_m + \mu_m \mu_h^2 + \mu_m \mu_h \rho_h + \mu_m \mu_h + \mu_m \rho_h) \end{aligned}$$

2.3. Bilangan Reproduksi Dasar

Pada analisis model transmisi penyakit demam berdarah *dengue* , penentuan bilangan reproduksi dasar sangat penting. Besarnya bilangan reproduksi dasar yang disimbolkan dengan \mathfrak{R}_0 menyatakan jumlah rata-rata kejadian baru yang disebabkan oleh penyebaran penyakit dari individu yang terinfeksi. Jika nilai $\mathfrak{R}_0 > 1$ maka setiap individu yang sakit dapat menularkan penyakitnya ke lebih dari satu individu. Pada kondisi tersebut titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil, namun sebaliknya jika $\mathfrak{R}_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik loka, sehingga kondisi penyebaran penyakit dapat terkendali. Bilangan reproduksi dasar dapat dicari dengan menggunakan matriks NGM (*Next Generation Matrix*). Berikut perhitungan bilangan reproduksi dasar pada model dinamik transmisi demam berdarah *dengue*.

Dari model dinamik (1) dapat ditentukan,

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}^*) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \\ \mathcal{F}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b\beta_h S_h I_m}{N} \\ 0 \\ \frac{b\beta_m S_m I_h}{N} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mu_h + \rho_h)E_h \\ \rho_h E_h - (\gamma_h + \mu_h)I_h - (1 - \gamma_h)I_h \\ -(\rho_m + \mu_m)E_m \\ \rho_m E_m - \mu_m I_m \end{bmatrix}$$

Untuk mencari bilangan reproduksi dasar, maka akan ditentukan radius spectral dari matriks generation FV^{-1} dan diperoleh formula bilangan reproduksi dasar sebagai berikut,

$$\mathfrak{R}_0 = \left(\sqrt{\frac{\mu_m \beta_m \rho_h N M \beta_h b \mu_m (\mu_h^2 + \mu_h \rho_h + \mu_h + \rho_h)}{N \mu_m (\rho_m \mu_h^2 + \rho_m \mu_h \rho_h + \mu_m \mu_h^2 + \mu_m \mu_h \rho_h + \rho_m \mu_h + \rho_m \rho_h + \mu_m \mu_h + \mu_m \rho_h)}} \right)$$

2.4. Eksistensi Titik Kesetimbangan

Sebelum menganalisis kestabilan titik kesetimbangan maka akan di analisis terlebih dahulu eksistensi dari masing-masing titik kesetimbangan.

Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

$$\mathcal{E}_0(S_{h_0}, E_{h_0}, I_{h_0}, R_{h_0}, S_{m_0}, E_{m_0}, I_{m_0}) = \left(N, 0, 0, 0, \frac{M}{\mu_m}, 0, 0 \right)$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit akan selalu eksis.

Titik Kesetimbangan Endemik

$\mathcal{E}^*(S_h^*, E_h^*, I_h^*, R_h^*, S_m^*, E_m^*, I_m^*)$, Titik kesetimbangan endemik \mathcal{E}^* akan eksis jika,

$$M b^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m - \mu_m A > 0$$

$$M b^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m - \frac{\mu_m^2 \beta_m \rho_h N M D}{\mathfrak{R}_0^2} > 0$$

$$M b^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m > \frac{\mu_m^2 \beta_m \rho_h N M D}{\mathfrak{R}_0^2}$$

$$\mathfrak{R}_0^2 > \frac{\mu_m^2 \beta_m \rho_h N M D}{M b^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m}$$

$$\mathfrak{R}_0^2 > \frac{\mu_m^2 N D}{b^2 \beta_h \rho_m}$$

$$\mathfrak{R}_0 > \frac{\mu_m^2 ND}{b^2 \beta_h \rho_m}$$

$$\mathfrak{R}_0 > 1$$

Sehingga titik kesetimbangan endemik akan eksis jika $\mathfrak{R}_0 > 1$

2.5. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Teorema 5.1 Diberikan $\mathfrak{R}_0 = \left(\sqrt{\frac{\mu_m \beta_m \rho_h N M \beta_h b \mu_m (\mu_h^2 + \mu_h \rho_h + \mu_h + \rho_h)}{N \mu_m (\rho_m \mu_h^2 + \rho_m \mu_h \rho_h + \mu_m \mu_h^2 + \mu_m \mu_h \rho_h + \rho_m \mu_h + \rho_m \rho_h + \mu_m \mu_h + \mu_m \rho_h)}} \right)$, Titik

kesetimbangan endemik $\mathcal{E}^*(S_h^*, E_h^*, I_h^*, R_h^*, S_m^*, E_m^*, I_m^*)$ bersifat stabil jika $\mathfrak{R}_0 > 1$ dan tidak stabil jika $\mathfrak{R}_0 < 1$

Bukti.

Untuk membuktikan kestabilan titik endemik akan stabil jika $\mathfrak{R}_0 > 1$, akan dilakukan analisis karakteristik polynomial. Langkah awal yang dilakukan yaitu linearisasi system (1).

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} S_h \\ E_h \\ I_h \\ R_h \\ S_m \\ E_m \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S_h} & \frac{\partial f_1}{\partial E_h} & \frac{\partial f_1}{\partial I_h} & \frac{\partial f_1}{\partial R_h} & \frac{\partial f_1}{\partial S_m} & \frac{\partial f_1}{\partial E_m} & \frac{\partial f_1}{\partial I_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_h} & \frac{\partial f_2}{\partial E_h} & \frac{\partial f_2}{\partial I_h} & \frac{\partial f_2}{\partial R_h} & \frac{\partial f_2}{\partial S_m} & \frac{\partial f_2}{\partial E_m} & \frac{\partial f_2}{\partial I_m} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S_h} & \frac{\partial f_3}{\partial E_h} & \frac{\partial f_3}{\partial I_h} & \frac{\partial f_3}{\partial R_h} & \frac{\partial f_3}{\partial S_m} & \frac{\partial f_3}{\partial E_m} & \frac{\partial f_3}{\partial I_m} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S_h} & \frac{\partial f_4}{\partial E_h} & \frac{\partial f_4}{\partial I_h} & \frac{\partial f_4}{\partial R_h} & \frac{\partial f_4}{\partial S_m} & \frac{\partial f_4}{\partial E_m} & \frac{\partial f_4}{\partial I_m} \\ \frac{\partial f_5}{\partial S_h} & \frac{\partial f_5}{\partial E_h} & \frac{\partial f_5}{\partial I_h} & \frac{\partial f_5}{\partial R_h} & \frac{\partial f_5}{\partial S_m} & \frac{\partial f_5}{\partial E_m} & \frac{\partial f_5}{\partial I_m} \\ \frac{\partial f_6}{\partial S_h} & \frac{\partial f_6}{\partial E_h} & \frac{\partial f_6}{\partial I_h} & \frac{\partial f_6}{\partial R_h} & \frac{\partial f_6}{\partial S_m} & \frac{\partial f_6}{\partial E_m} & \frac{\partial f_6}{\partial I_m} \\ \frac{\partial f_7}{\partial S_h} & \frac{\partial f_7}{\partial E_h} & \frac{\partial f_7}{\partial I_h} & \frac{\partial f_7}{\partial R_h} & \frac{\partial f_7}{\partial S_m} & \frac{\partial f_7}{\partial E_m} & \frac{\partial f_7}{\partial I_m} \end{bmatrix} (S_h^*, E_h^*, I_h^*, R_h^*, S_m^*, E_m^*, I_m^*), \begin{bmatrix} \bar{S}_h \\ \bar{E}_h \\ \bar{I}_h \\ \bar{R}_h \\ \bar{S}_m \\ \bar{E}_m \\ \bar{I}_m \end{bmatrix}$$

Dengan aplikasi Maple versi 15 diperoleh :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} S_h \\ E_h \\ I_h \\ R_h \\ S_m \\ E_m \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b\beta_h I_m}{N} - \mu_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b\beta_h S_h}{N} \\ \frac{b\beta_h I_m}{N} & -\mu_h - \rho_h & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b\beta_h S_h}{N} \\ 0 & \rho_h & -\mu_h - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \gamma_h & -\mu_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b\beta_m S_m}{N} & 0 & -\frac{b\beta_m I_h}{N} - \mu_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b\beta_m S_m}{N} & 0 & \frac{b\beta_m I_h}{N} & -\rho_m - \mu_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_m & -\mu_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{S}_h \\ \bar{E}_h \\ \bar{I}_h \\ \bar{R}_h \\ \bar{S}_m \\ \bar{E}_m \\ \bar{I}_m \end{bmatrix} \quad (2)$$

Selanjutnya substitusikan titik endemik ke persamaan (2) dan diperoleh Matriks Jacobi di titik $\mathcal{E}^*(S_h^*, E_h^*, I_h^*, R_h^*, S_m^*, E_m^*, I_m^*)$ sebagai berikut:

$$J(\mathcal{E}^*) = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 \\ 0 & b_6 & b_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_8 & b_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{10} & 0 & b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{12} & 0 & b_{13} & b_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{15} & b_{16} \end{bmatrix}$$

Dengan,

$$b_1 = -\frac{b\beta_h(\mu_h(Mb^2\beta_h\rho_m\rho_h\beta_m - A))}{N\mu_m C(D + b^2\beta_h\mu_h\rho_h\beta_m)} - \mu_h$$

$$b_2 = -\frac{b\beta_h N^2 \mu_m EC}{N\beta_m\rho_h b(Mb\beta_h\rho_m + N\rho_m\mu_m\mu_h + N\mu_m^2\mu_h)}$$

$$b_3 = \frac{b\beta_h(\mu_h(Mb^2\beta_h\rho_m\rho_h\beta_m - A))}{N\mu_m C(D + b^2\beta_h\mu_h\rho_h\beta_m)}$$

$$b_4 = -\mu_h - \rho_h$$

$$b_5 = \frac{b\beta_h N^2 \mu_m EC}{N\beta_m\rho_h b(Mb\beta_h\rho_m + N\rho_m\mu_m\mu_h + N\mu_m^2\mu_h)}$$

$$b_6 = \rho_h$$

$$b_7 = -\mu_h - 1$$

$$b_8 = 1 - \gamma_h$$

$$b_9 = -\mu_h$$

$$b_{10} = -\frac{b\beta_m N^2 \mu_m EC}{N\beta_m\rho_h b(Mb\beta_h\rho_m + N\rho_m\mu_m\mu_h + N\mu_m^2\mu_h)}$$

$$b_{11} = -\frac{b\beta_m(N\mu_h(Mb^2\beta_h\rho_m\beta_m - \mu_m A))}{N\beta_m b(\mu_h + 1)(Mb\beta_h\rho_m C + A - B)} - \mu_m$$

$$b_{12} = \frac{b\beta_m N^2 \mu_m EC}{N\beta_m\rho_h b(Mb\beta_h\rho_m + N\rho_m\mu_m\mu_h + N\mu_m^2\mu_h)}$$

$$b_{13} = \frac{b\beta_m(N\mu_h(Mb^2\beta_h\rho_m\beta_m - \mu_m A))}{N\beta_m b(\mu_h + 1)(Mb\beta_h\rho_m C + A - B)}$$

$$b_{14} = -\rho_m - \mu_m$$

$$b_{15} = \rho_m$$

$$b_{16} = \mu_m$$

Dari Matriks Jacobian di titik $\mathcal{E}^*(S_h^*, E_h^*, I_h^*, R_h^*, S_m^*, E_m^*, I_m^*)$, kita peroleh persamaan karakteristik polynomial sebagai berikut :

$$Pol(X^7) = c_0x^7 + c_1x^6 + c_2x^5 + c_3x^4 + c_4x^3 + c_5x^2 + c_6x + c_7 \tag{3}$$

Dimana,

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = -b_{16} - b_{14} - b_{11} - b_9 - b_7 - b_4 - b_1$$

$$c_2 = b_1b_{11} + b_1b_{14} + b_1b_{16} + b_1b_4 + b_1b_7 + b_1b_9 + b_{11}b_{14} + b_{11}b_{16} + b_{11}b_4 + b_{11}b_7 + b_{11}b_9 + b_{14}b_{16} + b_{14}b_4 + b_{15}b_7 + b_{14}b_9 + b_{16}b_4 + b_{16}b_7 + b_{16}b_9 + b_4b_7 + b_4b_9 + b_7b_9$$

$$c_3 = -b_1b_{11}b_{14} - (b_1b_{11} + b_1b_{14} + b_{11}b_{14})(b_{16} + b_4 + b_7 + b_9) - (b_1b_{16} + b_{11}b_{16} + b_{14}b_{16})(b_4 + b_7 + b_9) - (b_1b_4 + b_{11}b_4 + b_{14}b_4 + b_{16}b_4)(b_7 + b_9) - (b_1 + b_{11} + b_{14} + b_{16} + b_4)b_7b_9$$

$$\begin{aligned}
 c_4 &= b_1 b_{11} b_{14} b_{16} + (b_1 b_{11} b_{14})(b_{16} + b_4 + b_7 + b_9) + (b_1 b_{11} b_{16} + b_1 b_{14} b_{16} \\
 &\quad + b_{11} b_{14} b_{16})(b_4 + b_7 + b_9) + (b_1 b_{11} b_4 + b_4 + b_1 b_{14} b_4 + b_{11} b_{14} b_4 + b_{11} b_{16} b_4 \\
 &\quad + b_1 b_{16} b_4 + b_1 4 b_{16} b_4)(b_7 + b_9) + (b_1 b_{16} + b_1 b_{14} + b_{11} b_{14} + b_{11} b_{16} + b_{14} b_{16} \\
 &\quad + b_{11} b_4 + b_{14} b_4 + b_{16} b_4 + b_1 b_4) b_7 b_9 - b_{12} b_{15} b_5 b_6 \\
 c_5 &= -(b_1 b_{11} b_{14} b_{16} (b_4 + b_7 + b_9) (b_1 b_{11} b_{14} + b_1 b_{11} b_4 + b_1 b_{14} b_{16} \\
 &\quad + b_1 b_{14} b_4 + b_1 b_{16} b_4 + b_{11} b_{14} b_4 + b_{11} b_{16} b_4 + b_{16} b_{14} b_4) b_7 b_9 \\
 &\quad - (b_1 b_{11} b_{14} b_4 + b_1 b_{11} b_{16} b_4 + b_1 b_{14} b_{16} b_4 + b_{11} b_{14} b_{16} b_4) (b_7 + b_9) \\
 &\quad + b_1 b_{12} b_{15} b_5 b_6 - b_{10} b_{13} b_{15} b_5 b_6 + b_{11} b_{12} b_{15} b_5 b_6 - b_2 b_{12} b_{15} b_3 b_6 \\
 &\quad + b_5 b_{12} b_{15} b_9 b_6 \\
 c_6 &= (b_1 b_{10} b_{15} b_{13} + b_1 b_{11} b_{15} b_{12}) (b_5 b_6) \\
 &\quad + b_1 b_{11} b_{14} b_{16} b_4 (b_7 + b_9) + (b_1 b_{11} b_{14} b_4 + b_1 b_{11} b_{16} b_4 + b_1 b_{14} b_{16} b_4 \\
 &\quad + b_{11} b_{14} b_{16} b_4) b_7 b_9 - b_1 b_{12} b_{15} b_9 b_5 b_6 b_2 b_{10} b_{15} b_{13} b_3 b_6 - b_{11} b_{12} b_{15} b_9 b_5 b_6 \\
 &\quad + b_{12} b_2 b_{15} b_3 b_9 b_6 \\
 c_7 &= -b_9 (b_1 b_{10} b_{15} b_{13} b_5 b_6 - b_1 b_{11} b_{15} b_{12} b_5 b_6 + b_1 b_{11} b_{14} b_{16} b_4 b_7 \\
 &\quad - b_{10} b_{15} b_{13} b_3 b_6 + b_{11} b_{15} b_{12} b_3 b_6)
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (3), digunakan metode Routh Hurwitz (Ndendya, *et al.*, 2023) untuk menganalisis kestabilan local titik endemik . Matriks Hurwitz pada persamaan (3) sebagai berikut,

$$H = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ c_5 & c_4 & c_3 & c_2 \\ c_7 & c_6 & c_5 & c_4 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Determinan matriks Hurwitz (4) yang pertama,

$$|H_1| = |c_1|$$

$$|H_1| = -b_{16} - b_{14} - b_{11} - b_9 - b_7 - b_4 - b_1$$

Karena $b_{16}, b_{14}, b_{11}, b_9, b_7, b_4, b_1 < 0$ maka $|H_1|$ bernilai positif

Determinan matriks Hurwitz (4) yang kedua,

$$|H_2| = \begin{vmatrix} c_1 & c_0 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$|H_2| = -k - (-k - \mu_m) - \left(-\frac{\mu_h (M b^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m - \mu_m A)}{C (M b \beta_h \rho_m + N \rho_m \mu_m \mu_h + N \mu_m^2 \mu_h) (\mu_h + 1)} - \mu_m \right) - (-\mu) - (-\mu - 1) -$$

$$(-\rho - \mu) - \left(-\frac{\mu_h (M b^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m - \mu_m A)}{N \mu_m C \left(b \mu_h \rho_m \beta_m + \frac{D}{\beta_h b} \right) (\mu_h + 1)} - \mu \right)$$

$$\begin{aligned}
 |H_2| &= 2\mu_m + \frac{\mu_h (M b^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m - \mu_m A)}{C (M b \beta_h \rho_m + N \rho_m \mu_m \mu_h + N \mu_m^2 \mu_h) (\mu_h + 1)} + 4\mu_h + 1 + \rho_h \\
 &\quad + \frac{\mu_h (M b^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m - \mu_m A)}{N \mu_m C \left(b \mu_h \rho_m \beta_m + \frac{D}{\beta_h b} \right) (\mu_h + 1)}
 \end{aligned}$$

Matriks Hurwitz bernilai positif jika,

$$M b^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m - \mu_m A > 0$$

$$M b^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m - \frac{\mu_m^2 \beta_m \rho_h N M D}{\mathfrak{R}_0^2} > 0$$

$$M b^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m > \frac{\mu_m^2 \beta_m \rho_h N M D}{\mathfrak{R}_0^2}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_0^2 &> \frac{\mu_m^2 \beta_m \rho_h N M D}{M b^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m} \\ \mathfrak{R}_0^2 &> \frac{\mu_m^2 N D}{b^2 \beta_h \rho_m} \\ \mathfrak{R}_0 &> \frac{\mu_m^2 N D}{b^2 \beta_h \rho_m} \\ \mathfrak{R}_0 &> 1 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa solusi titik endemik bernilai negatif jika determinan matriks Hurwitz bernilai positif. Kondisi tersebut memenuhi syarat bahwa titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal jika $\mathfrak{R}_0 > 1$.

Theorem 5.2 Let $\mathfrak{R}_0 = \left(\sqrt{\frac{\mu_m \beta_m \rho_h N M \beta_h b \mu_m (\mu_h^2 + \mu_h \rho_h + \mu_h + \rho_h)}{N \mu_m (\rho_m \mu_h^2 + \rho_m \mu_h \rho_h + \mu_m \mu_h^2 + \mu_m \mu_h \rho_h + \rho_m \mu_h + \rho_m \rho_h + \mu_m \mu_h + \mu_m \rho_h)}} \right)$, the disease free equilibrium will be locally asymptotically stable if $\mathfrak{R}_0 < 1$ and unstable if $\mathfrak{R}_0 > 1$.

Bukti.

Untuk membuktikan titik bebas penyakit stabil jika $\mathfrak{R}_0 < 1$, kita gunakan persamaan karakteristik polynomial. Langkah awal yaitu linearisasi dari system persamaan (1).

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} S_h \\ E_h \\ I_h \\ R_h \\ S_m \\ E_m \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S_h} & \frac{\partial f_1}{\partial E_h} & \frac{\partial f_1}{\partial I_h} & \frac{\partial f_1}{\partial R_h} & \frac{\partial f_1}{\partial S_m} & \frac{\partial f_1}{\partial E_m} & \frac{\partial f_1}{\partial I_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_h} & \frac{\partial f_2}{\partial E_h} & \frac{\partial f_2}{\partial I_h} & \frac{\partial f_2}{\partial R_h} & \frac{\partial f_2}{\partial S_m} & \frac{\partial f_2}{\partial E_m} & \frac{\partial f_2}{\partial I_m} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S_h} & \frac{\partial f_3}{\partial E_h} & \frac{\partial f_3}{\partial I_h} & \frac{\partial f_3}{\partial R_h} & \frac{\partial f_3}{\partial S_m} & \frac{\partial f_3}{\partial E_m} & \frac{\partial f_3}{\partial I_m} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S_h} & \frac{\partial f_4}{\partial E_h} & \frac{\partial f_4}{\partial I_h} & \frac{\partial f_4}{\partial R_h} & \frac{\partial f_4}{\partial S_m} & \frac{\partial f_4}{\partial E_m} & \frac{\partial f_4}{\partial I_m} \\ \frac{\partial f_5}{\partial S_h} & \frac{\partial f_5}{\partial E_h} & \frac{\partial f_5}{\partial I_h} & \frac{\partial f_5}{\partial R_h} & \frac{\partial f_5}{\partial S_m} & \frac{\partial f_5}{\partial E_m} & \frac{\partial f_5}{\partial I_m} \\ \frac{\partial f_6}{\partial S_h} & \frac{\partial f_6}{\partial E_h} & \frac{\partial f_6}{\partial I_h} & \frac{\partial f_6}{\partial R_h} & \frac{\partial f_6}{\partial S_m} & \frac{\partial f_6}{\partial E_m} & \frac{\partial f_6}{\partial I_m} \\ \frac{\partial f_7}{\partial S_h} & \frac{\partial f_7}{\partial E_h} & \frac{\partial f_7}{\partial I_h} & \frac{\partial f_7}{\partial R_h} & \frac{\partial f_7}{\partial S_m} & \frac{\partial f_7}{\partial E_m} & \frac{\partial f_7}{\partial I_m} \end{bmatrix} (S_{h_0}, E_{h_0}, I_{h_0}, R_{h_0}, S_{m_0}, E_{m_0}, I_{m_0}), \begin{bmatrix} \overline{S_h} \\ \overline{E_h} \\ \overline{I_h} \\ \overline{R_h} \\ \overline{S_m} \\ \overline{E_m} \\ \overline{I_m} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan aplikasi maple kita peroleh :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} S_h \\ E_h \\ I_h \\ R_h \\ S_m \\ E_m \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b\beta_h I_m}{N} - \mu_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b\beta_h S_h}{N} \\ \frac{b\beta_h I_m}{N} & -\mu_h - \rho_h & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b\beta_h S_h}{N} \\ 0 & \rho_h & -\mu_h - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \gamma_h & -\mu_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b\beta_m S_m}{N} & 0 & -\frac{b\beta_m I_h}{N} - \mu_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b\beta_m S_m}{N} & 0 & \frac{b\beta_m I_h}{N} & -\rho_m - \mu_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_m & -\mu_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{S_h} \\ \overline{E_h} \\ \overline{I_h} \\ \overline{R_h} \\ \overline{S_m} \\ \overline{E_m} \\ \overline{I_m} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Kemudian substitusikan titik non-endemik ke persamaan (5) dan kita peroleh Matriks Jacobian di titik $\mathcal{E}_0(S_{h_0}, E_{h_0}, I_{h_0}, R_{h_0}, S_{m_0}, E_{m_0}, I_{m_0}) = \left(N, 0, 0, 0, \frac{M}{\mu_m}, 0, 0\right)$ sebagai berikut :

$$J(\mathcal{E}_0) = \begin{pmatrix} -\mu_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b\beta_h \\ 0 & -\mu_h - \rho_h & 0 & 0 & 0 & 0 & b\beta_h \\ 0 & \rho_h & -\mu_h - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \gamma_h & -\mu_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b\beta_m M}{\mu_m N} & 0 & -\mu_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b\beta_m M}{\mu_m N} & 0 & \frac{b\beta_m I_h}{N} & -\rho_m - \mu_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_m & -\mu_m \end{pmatrix} \quad (6)$$

Dari Matriks Jacobian (6) kita peroleh persamaan karakteristik polynomial sebagai berikut :

$$P(X^6) = -\frac{1}{NM} (\mu_h + x)^2 (\mu_m + x) (Mb^2\beta_h\rho_m\rho_h\beta_m - N\rho_m\mu_m^2\mu_h^2 - N\rho_m\mu_m^2\mu_h\rho_m - 2N\rho_h\mu_m^2\mu_hx - N\rho_m\mu_m^2\rho_mx - N\rho_m\mu_m^2x^2 - N\rho_m\mu_m\mu_h^2x - N\rho_m\mu_m\mu_h\rho_mx - 2N\rho_h\mu_m^2\mu_hx^2 - N\rho_m\mu_m\rho_mx^2 - N\rho_m\mu_mx^3 - N\mu_m^3\mu_h^2 - N\mu_m^3\mu_h\rho_h - 2N\mu_m^3\mu_hx - N\mu_m^3\rho_hx - N\mu_m^3x^2 - 2N\mu_m^2\mu_h^2x - 2N\mu_m^2\mu_h\rho_hx - 4Nm^2\mu_hx^2 - 2N\mu_m^2\rho_hx^2 - 2N\mu_h^2x^3 - N\mu_m\mu_h^2x^2 - N\mu_m\mu_h\rho_hx^2 - 2N\mu_m\mu_hx^3 - N\mu_m\rho_hx^3 - N\mu_mx^4 - N\rho_m\mu_m^2\mu_h - N\rho_m\mu_m^2\rho_h - N\rho_m\mu_m^2x - N\rho_m\mu_m\mu_hx - N\rho_m\mu_mx^2 - N\mu_m^3\mu_h - N\mu_m^3\rho_h - N\mu_m^3x - 2N\mu_m^2\mu_hx - 2N\mu_m^2\rho_hx - 2N\mu_m^2x^2 - N\mu_m\mu_h^2x^2 - N\mu_m\rho_hx^2 - N\mu_mx^3) \quad (7)$$

Sistem persamaan pada model (1) akan stabil asimtotik lokal jika akar dari persamaan karakteristik polynomial (7) di titik bebas penyakit, bernilai negatif. Dari persamaan (7), kita peroleh 2 akar sebagai berikut :

$$x_1 = -\mu_h$$

$$x_2 = -\mu_m$$

Selanjutnya untuk mengetahui solusi akar persamaan karakteristik yang lain, kita gunakan persamaan polynomial berikut :

$$P(X^6) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

Dengan,

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \rho_m + 2\mu_m + \rho_h + 1$$

$$a_2 = \rho_m\mu_m + 2\rho_m\mu_h + \rho_m\rho_h + \mu_m^2 + 4\mu_m\mu_h + 2\mu_m\rho_h + \mu_h^2 + \mu_h\rho_h + \rho_m + 2\mu_m + \mu_h + \rho_h$$

$$a_3 = 2\rho_m\mu_m\mu_h + \rho_m\mu_m\rho_h + \rho_m\mu_h^2 + \rho_m\mu_h\rho_h + 2\mu_m^2\mu_h + \mu_m^2\rho_h + 2\mu_m\mu_h^2 + 2\mu_m\mu_h\rho_h + \rho_m\mu_h + \rho_m\rho_h + \mu_m^2 + 2\mu_m\mu_h + 2\mu_m\rho_h$$

$$a_4 = -\frac{1}{NM} (Mb^2\beta_h\rho_m\rho_h\beta_m - \rho_m\mu_h^2 - \rho_m\mu_h\rho_h - \mu_m\mu_h^2 - \mu_m\mu_h\rho_h - \rho_m\mu_h - \rho_m\rho_h - \mu_m\mu_h - \mu_m\rho_h)$$

Diperoleh solusi persamaan karakteristik (7) sebagai berikut:

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = -\frac{a_1}{a_0} = -\frac{\rho_m + 2\mu_m + \rho_h + 1}{1}$$

$$x_3 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_5 + x_3 \cdot x_6 + x_4 \cdot x_5 + x_4 \cdot x_6 + x_5 \cdot x_6 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$= \frac{\rho_m \mu_m + 2\rho_m \mu_h + \rho_m \rho_h + \mu_m^2 + 4\mu_m \mu_h + 2\mu_m \rho_h + \mu_h^2 + \mu_h \rho_h + \rho_m + 2\mu_m + \mu_h + \rho_h}{1}$$

$$x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 + x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 + x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 = -\frac{a_3}{a_0}$$

$$= -\frac{2\rho_m \mu_m \mu_h + \rho_m \mu_m \rho_h + \rho_m \mu_h^2 + \rho_m \mu_h \rho_h + 2\mu_m^2 \mu_h + \mu_m^2 \rho_h + 2\mu_m \mu_h^2 + 2\mu_m \mu_h \rho_h + \rho_m \mu_h + \rho_m \rho_h + \mu_m^2 + 2\mu_m \mu_h + 2\mu_m \rho_h}{1}$$

$$x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 = \frac{a_4}{a_0}$$

$$= -\frac{1}{NM} (Mb^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m - \rho_m \mu_h^2 - \rho_m \mu_h \rho_h - \mu_m \mu_h^2 - \mu_m \mu_h \rho_h - \rho_m \mu_h - \rho_m \rho_h - \mu_m \mu_h - \mu_m \rho_h)$$

Solusi akar persamaan (7) bernilai negatif jika,

$$-\frac{1}{NM} (Mb^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m - \rho_m \mu_h^2 - \rho_m \mu_h \rho_h - \mu_m \mu_h^2 - \mu_m \mu_h \rho_h - \rho_m \mu_h - \rho_m \rho_h - \mu_m \mu_h - \mu_m \rho_h) > 0$$

$$-\frac{1}{NM} \left(Mb^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m - \frac{A}{N\mu_m} \right) > 0$$

$$-\frac{1}{NM} \left(Mb^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m - \frac{\mu_m \beta_m \rho_h NMD}{\mathfrak{R}_0^2 N\mu_m} \right) > 0$$

$$Mb^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m < \frac{\mu_m \beta_m \rho_h NMD}{N\mu_m \mathfrak{R}_0^2}$$

$$Mb^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m \mathfrak{R}_0^2 < \beta_m \rho_h MD$$

$$\mathfrak{R}_0^2 < \frac{\beta_m \rho_h MD}{Mb^2 \beta_h \rho_m \rho_h \beta_m}$$

$$\mathfrak{R}_0^2 < \frac{D}{b^2 \beta_h \rho_m}$$

$$\mathfrak{R}_0 < \sqrt{\frac{D}{b^2 \beta_h \rho_m}}$$

Karena $0 \leq D \leq 1$ dan $b \geq 1$ maka, $\mathfrak{R}_0 < 1$

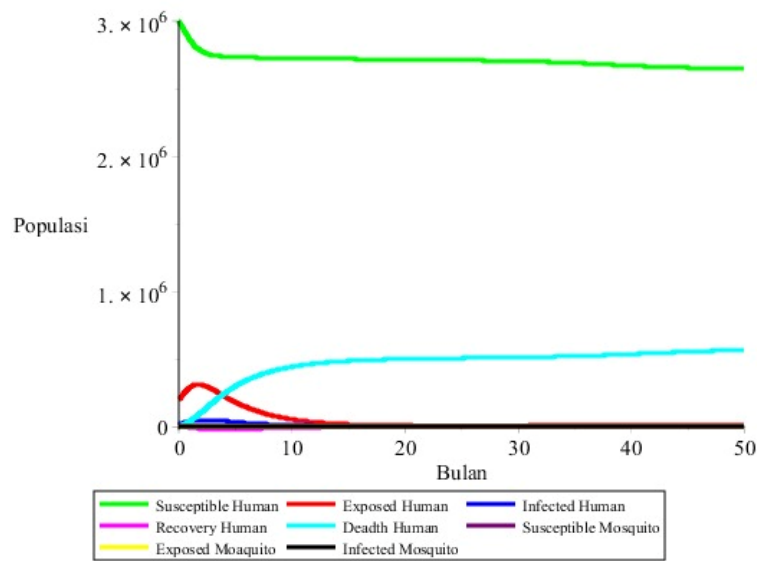
Terbukti bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik local jika nilai $\mathfrak{R}_0 < 1$. Lebih jauh lagi, pada kasus ini menjelaskan bahwa, jika kondisi titik bebas penyakit stabil, artinya penyebaran penyakit DBD masih terkontrol.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dengan menggunakan software Maple versi “Maple 15” dan data dari referensi jurnal (R. Pandey et al., 2023), dilakukan simulasi numerik model (1), dengan kondisi awal $S_h(0) = 3.000.000, E_h(0) = 200000, I_h(0) = 10000, R_h(0) = 9000, D_h(0) = 2000, S_m(0) = 5000, E_m(0) = 4000, I_m(0) = 3500$ dan nilai parameter yang ditunjukkan pada Tabel 2.

Tabel 1. Parameter Values

Notasi	Nilai	Satuan	Referensi
μ_h	0,012	day ⁻¹	(R. Pandey et al., 2023)
β_h	0,1	day ⁻¹	(R. Pandey et al., 2023)
ρ_h	0,3	day ⁻¹	(R. Pandey et al., 2023)
γ_h	1,5	day ⁻¹	(R. Pandey et al., 2023)
μ_m	0,003	day ⁻¹	(R. Pandey et al., 2023)
β_m	0,001	day ⁻¹	(R. Pandey et al., 2023)
ρ_m	2,1428	day ⁻¹	(R. Pandey et al., 2023)
b	1000	Unit	(R. Pandey et al., 2023)



Gambar 2. Model Transmisi Demam Berdarah *Dengue*

Pada Gambar 1, dengan parameter yang diberikan, simulasi model transmisi dengue menunjukkan nilai $\mathfrak{R}_0 = 5,173 > 1$. Berdasarkan gambar tersebut, kondisi subpopulasi manusia rentan mengalami penurunan karena interaksi dengan subpopulasi nyamuk terinfeksi, sehingga subpopulasi manusia rentan menjadi terpapar, kemudian seiring berjalannya waktu akan menjadi subpopulasi manusia terinfeksi. Dari simulasi numerik, manusia yang tertular lebih banyak yang meninggal dibandingkan yang sembuh. Subpopulasi manusia yang meninggal meningkat dan stabil seiring waktu. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat nyamuk yang terinfeksi dan menularkan penyakit tersebut ke lebih dari satu individu manusia dalam jangka waktu tertentu. Oleh karena itu, terdapat sejumlah besar nyamuk yang terinfeksi dari waktu ke waktu yang dapat menyebabkan wabah dalam waktu yang singkat. Sehingga titik kesetimbangan endemic bersifat stabil asimtotik lokal.

4. SIMPULAN

Dalam penelitian ini, telah dipelajari model SEIRD-SEI untuk penularan demam berdarah *dengue*. Model ini mencakup 8 subpopulasi yaitu manusia rentan, manusia terpapar, manusia terinfeksi, manusia sembuh, manusia meninggal, nyamuk rentan, nyamuk terpapar, dan nyamuk terinfeksi. Secara teoritis terbukti bahwa transmisi virus *dengue* bergantung dengan nilai \mathfrak{R}_0 pada titik kesetimbangan, dan nilainya menentukan kestabilan dari model. Metode Routh Hurwitz merupakan

pendekatan yang digunakan untuk menganalisis kestabilan lokal. Berdasarkan analisis, nilai $\mathfrak{R}_0 > 1$ yang menunjukkan bahwa model (1) stabil asimtotik lokal pada titik kesetimbangan endemik. Simulasi numerik menggambarkan perilaku model penyebaran penyakit DBD. Adapun parameter model di ambil dari referensi (R. Pandey *et al.*, 2023), dan diperoleh nilai $\mathfrak{R}_0 = 5,173$ yang menunjukkan bahwa model penularan Demam Berdarah *Dengue* stabil asimtotik lokal pada titik kesetimbangan endemik. Dengan mengetahui bahwa titik endemik bersifat stabil maka dapat dijadikan sebagai acuan untuk memprediksi persebaran penyakit dalam jangka panjang dan juga dapat menentukan perencanaan respon yang tepat dalam menghadapi wabah penyakit demam berdarah *dengue* yang bersifat endemik.

5. DAFTAR PUSTAKA

- A. Pardi and A. Agustina. (2023). *Analisis Model SIR-ASI Pada Penyakit Demam Berdarah Dengue*. Mathematics & Applications Journal, vol 5, no. 1.
- B. Wang, X, et al. (2023). Threshold dynamics and optimal control of a dengue epidemic model with time delay and saturated incidence. J. Appl. Math. Comput., vol. 69, no. 1, pp. 871–893.
- C. Xu, Y. Yu, G. Ren, Y. Sun, and X. Si. (2023). Stability analysis and optimal control of a fractional-order generalized SEIR model for the COVID-19 pandemic. Appl. Math. Comput., vol. 457, p. 128210.
- F. Nurbaya and J. Pertiwi. (2019). Analisis Penanggulangan Demam Berdarah Dengue (Dbd) Di Kabupaten Sragen. J. Manaj. Inf. dan Adm. Kesehat., vol. 2, no. 2.
- G. C. D. Podung, S. N. N. Tatura, and M. F. J. Mantik. (2021). Faktor Risiko Terjadinya Sindroma Syok Dengue pada Demam Berdarah Dengue. J. Biomedik, vol. 13, no. 2, p. 161.
- H. R. Pandey, G. R. Phaijoo, and D. B. Gurung. (2023). Analysis of dengue infection transmission dynamics in Nepal using fractional order mathematical modeling. Chaos, Solitons Fractals X, vol. 11.
- J. Z. Ndendya, L. Leandry, and A. M. Kipingu. (2023). A next-generation matrix approach using Routh–Hurwitz criterion and quadratic Lyapunov function for modeling animal rabies with infective immigrants. Healthc. Anal., vol. 4, p. 100260.
- Kartono, et al. (2024). Dynamic Modeling And Optimal Control Strategies To Reduce The Spread Of Covid-19. Commun. Math. Biol. Neurosci. ISSN: 2052-2541.
- M. Faid and D. D. Purwanto. (2019). Desain Sistem Pakar Untuk Mendiagnosa Penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD). J. Inf. Syst. Hosp. Technol., vol. 1, no. 01, pp. 25–29.
- N. Anandika. (2020). Demam Berdarah. p. 38;64.
- N. R. Dewi. (2015). Demam Berdarah Dengue. Bul. Jendela Epidemiol., vol. 2, p. 48, 2015,
- P. R. Murugadoss, et al. (2023). Analysis of Dengue Transmission Dynamic Model by Stability and Hopf Bifurcation with Two-Time Delays. Front. Biosci. Landmark, vol. 28, no. 6.