



Indeks Topologi Padmakar Ivan dan Szeged pada Graf Koprime Prima dari Grup Bilangan Bulat Modulo

Abdurahim¹, Lia Fitta Pratiwi², Gusti Yogananda Karang³,
I Gede Adhiya Wisnu Wardhana⁴, Irwansyah⁵, Zatta Yumni Awanis⁶,
Mamika Ujianita Romdhini⁷

^{1,2,3,4,5,7} Program Studi Matematika, Universitas Mataram, ⁶ Badan Riset dan Inovasi Nasional

* adhit@unram.ac.id

ABSTRAK

Graf Koprime Prima merupakan graf dengan sebarang dua simpul berbeda dikatakan bertetangga jika dan hanya jika faktor persekutuan terbesar dari order kedua simpul sama dengan 1 atau saling prima. Penelitian ini bertujuan untuk mengobservasi rumus umum dari indeks Padmakar-Ivan dan Szeged pada graf koprime prima dari grup bilangan bulat modulo dengan $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$. Dari penelitian ini didapatkan rumus indeks Padmakar-Ivan dan Szeged serta hubungan antar kedua indeks tersebut.

Kata Kunci: graf koprime prima, indeks Padmakar-Ivan, indeks Szeged.

ABSTRACT

The Prime Coprime Graph is defined as a graph in which two distinct vertices are adjacent if and only if the greatest common divisor of their orders is 1, indicating that they are coprime. This research focuses on deriving general formulas for the Padmakar-Ivan index and the Szeged index for the coprime prime graph of the modulo integer group with $n = p^k$, where p is a prime number and $k \geq 2$. As a result of this study, explicit formulas for the Padmakar-Ivan and Szeged indices were obtained, along with an analysis of the relationship between these two indices.

Keywords: prime coprime graph, Padmakar-Ivan index, Szeged index.

1. PENDAHULUAN

Representasi graf adalah salah satu topik yang menarik untuk dibahas karena topik ini perpaduan antara graf dan struktur aljabar. Hal ini terlihat dari beberapa hasil penelitian yang telah dipublikasi. Misalnya karakteristik graf koprima dari grup (Ma et al., 2014), karakteristik graf prima dari grup hingga (Ghorbani et al., 2021), bentuk graf dari graf koprima grup bilangan bulat modulo (Juliana et al., 2020), dan bentuk graf dari graf koprima grup dihedral (Gazir S et al., 2020), dan karakteristik graf pangkat dari grup bilangan bulat modulo (Syeedah et al., 2022).

Selain bahasan tentang karakteristik graf, ada juga hasil penelitian yang berkaitan dengan indeks topologi. Indeks Padmakar-Ivan (PI) dari graf koprima grup dihedral (Yatin et al., 2023), indeks PI dari graf kobipartit, graf garis, dan graf prismatik (Chithrabhanu & Somasundaram, 2022), serta indeks PI pada graf non-koprima grup bilangan bulat modulo (Ghoffari et al., 2024). Selain indeks PI, ada juga indeks Szeged. Beberapa hasil penelitian tentang indeks ini antara lain indeks Szeged dari graf pangkat grup hingga (Banerjee, 2023), graf non-kommuting dari grup quasi dihedral, dihedral, dan quaternion dihedral (Alimon et al., 2023), graf koprima dari grup dihedral (Alimon et al., 2020). Lebih jauh, terdapat juga penelitian yang mengkaji hubungan antara beberapa tipe indeks Szeged dari graf unisiklik (Das et al., 2020).

Beberapa graf yang pernah dikaji pada topik indeks topologi adalah graf prima, koprima, non-koprima, dihedral, dan pangkat. Terdapat graf yang saat ini baru membahas sifat-sifatnya (Adhikari & Banerjee, 2022). Graf koprima prima adalah graf yang simpul-simpulnya terdiri dari semua elemen grup G , di mana dua simpul berbeda, bertetangga jika orde kedua simpul adalah 1 atau prima. Oleh karena itu, pada artikel ini akan dibahas indeks topologi dari graf koprima prima, khususnya indeks Padmakar-Ivan dan Szeged. Grup yang digunakan adalah grup bilanganbulat modulo \mathbb{Z}_n dengan $n = p^k$ di mana p bilangan prima dan $k \geq 2$ bilangan asli. Untuk kasus n yang lain, dapat dijadikan peneltiian lanjutan, misalnya untuk $n = pq$ dengan $p < q$ bilangan prima. Lebih jauh, bisa juga dikaji untuk $n = p^k \cdot q^l$ untuk p, q prima dan k, l bilangan asli.

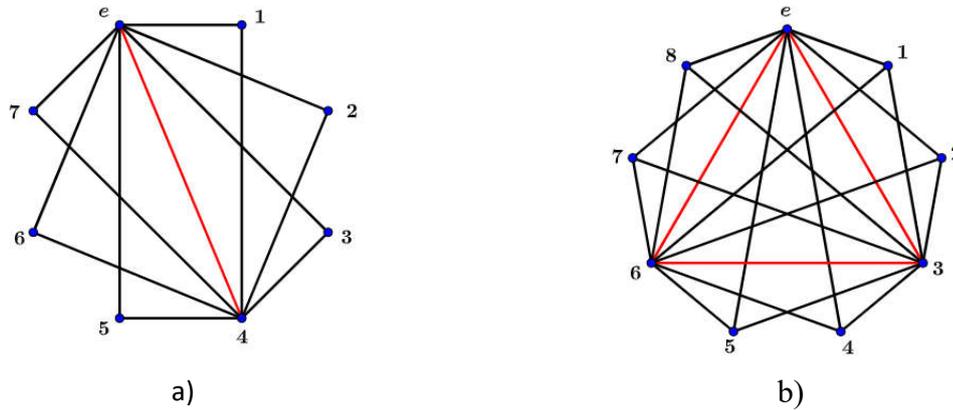
2. LANDASAN TEORI

Graf koprima prima, dinotasikan Γ_G , merupakan graf yang simpulnya terdiri dari semua elemen G di mana dua simpul berbeda, u dan v dengan $u \neq v$, bertetangga jika Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) order kedua simpul sama dengan 1 atau prima. Berikut diberikan definisi graf koprima prima

Definisi 2.1. (Adhikari & Banerjee, 2022) Diberikan G grup berhingga sedemikian hingga $|G| > 2$. Graf koprima prima $\Gamma_G = (V, E)$ didefinisikan sebagai himpunan verteks V merupakan semua elemen grup G dan sebarang dua simpul berbeda x, y dikatakan bertetangga jika dan hanya jika $FPB(|x|, |y|) = 1$ atau $FPB(|x|, |y|) = p$.

Diberikan contoh graf koprima prima sebagai berikut.

Contoh 2.2. Misal diberikan $n = 2^3$ dan $n = 3^2$ maka graf koprima prima dari grup \mathbb{Z}_8 dan \mathbb{Z}_9 seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf Koprime Prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_8}$ dan $\Gamma_{\mathbb{Z}_9}$

Definisi 2.3. Diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf koprime prima dari grup \mathbb{Z}_n . Jika $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat maka Indeks Padmakar-Ivan dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$, dinotasikan dengan $PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$, didefinisikan sebagai

$$PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \sum_{uv=e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_u(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_v(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}))$$

dengan $n_u(e)$ adalah semua simpul yang jaraknya dengan simpul u kurang dari simpul v dan $n_v(e)$ merupakan semua simpul yang jaraknya dengan simpul v kurang dari simpul u .

Contoh 2.4. Misal diberikan graf koprime prima dari grup \mathbb{Z}_8 , yaitu $\Gamma_{\mathbb{Z}_8}$, maka diperoleh Indeks Padmakar-Ivan sebagai berikut

$$\begin{aligned} PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_8}) &= (n_e(e1) + n_1(1e)) + (n_e(e2) + n_2(2e)) + (n_e(e3) + n_3(3e)) \\ &\quad + (n_e(e4) + n_4(4e)) + (n_e(e5) + n_5(5e)) + (n_e(e6) + n_6(6e)) \\ &\quad + (n_e(e7) + n_7(7e)) + (n_1(14) + n_4(41)) + (n_2(24) + n_4(42)) \\ &\quad + (n_3(34) + n_4(43)) + (n_4(45) + n_5(54)) + (n_4(46) + n_6(64)) \\ &\quad + (n_4(47) + n_7(74)) \\ &= (5 + 1) + (5 + 1) + (5 + 1) + (1 + 1) + (5 + 1) + (5 + 1) + (5 + 1) \\ &\quad + (1 + 5) + (1 + 5) + (1 + 5) + (5 + 1) + (5 + 1) + (5 + 1) \end{aligned}$$

$$PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_8}) = 74$$

Jadi, indeks Padmakar-Ivan dari graf koprime prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_8}$ adalah 74.

Definisi 2.5. Diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf koprime prima dari grup \mathbb{Z}_n . Jika $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat maka Indeks Szeged dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$, dinotasikan dengan $Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$, didefinisikan sebagai

$$Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \sum_{uv=e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_u(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) \cdot n_v(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}))$$

dengan $n_u(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$ adalah semua simpul yang jaraknya dengan simpul u kurang dari simpul v dan $n_v(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$ merupakan semua simpul yang jaraknya dengan simpul v kurang dari simpul u .

Contoh 2.6. Misal diberikan graf koprima prima dari grup \mathbb{Z}_9 , yaitu $\Gamma_{\mathbb{Z}_9}$, maka diperoleh Indeks Szeged sebagai berikut

$$\begin{aligned} Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_9}) &= (n_e(e1) \cdot n_1(1e)) + (n_e(e2) \cdot n_2(2e)) + (n_e(e3) \cdot n_3(3e)) \\ &\quad + (n_e(e4) \cdot n_4(4e)) + (n_e(e5) \cdot n_5(5e)) + (n_e(e6) \cdot n_6(6e)) \\ &\quad + (n_e(e7) \cdot n_7(7e)) + (n_e(e8) \cdot n_8(8e)) + (n_1(13) \cdot n_3(31)) \\ &\quad + (n_1(16) \cdot n_6(61)) + (n_2(23) \cdot n_3(32)) + (n_2(26) \cdot n_6(62)) \\ &\quad + (n_3(34) \cdot n_4(43)) + (n_3(35) \cdot n_5(53)) + (n_3(36) \cdot n_6(63)) \\ &\quad + (n_3(37) \cdot n_7(73)) + (n_3(38) \cdot n_8(83)) + (n_4(46) \cdot n_6(64)) \\ &\quad + (n_5(56) \cdot n_6(65)) + (n_6(67) \cdot n_7(76)) + (n_6(68) \cdot n_8(86)) \\ &= (5 \cdot 1) + (5 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + (5 \cdot 1) + (5 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + (5 \cdot 1) + (5 \cdot 1) + (1 \cdot 5) \\ &\quad + (1 \cdot 5) + (1 \cdot 5) + (1 \cdot 5) + (5 \cdot 1) + (5 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + (5 \cdot 1) + (5 \cdot 1) \\ &\quad + (1 \cdot 5) + (1 \cdot 5) + (5 \cdot 1) + (5 \cdot 1) \end{aligned}$$

$$Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_9}) = 93$$

Jadi, indeks Szeged dari graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_9}$ adalah 108.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini memanfaatkan metode deduktif untuk menggali pengetahuan baru dari struktur aljabar yang telah diteliti sebelumnya. Pendekatan ini dimulai dengan mengkaji struktur aljabar pada beberapa kasus guna mencari pola-pola tertentu. Dengan merujuk pada pola-pola tersebut, penulis kemudian mengajukan hipotesis untuk suatu kasus umum.

Pada graf koprima prima untuk $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$ bilangan asli akan dikonstruksi pola grafnya. Pengkonstruksian graf dimulai dari $n = 2^k$, $n = 3^k$, dan $n = 5^k$. Sehingga dapat disimpulkan bentuk pola graf untuk $n = p^k$

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut beberapa hasil dari penelitian ini terkait indeks Padmakar-Ivan dan Szeged dari grup koprima prima grup bilangan bulat modulo.

Lemma 4.1. Misal diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf koprima prima dari grup \mathbb{Z}_n . Jika $n = 2^k$ dengan $k \geq 2$ bilangan bulat, maka indeks Padmakar-Ivan dari graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah

$$PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = -4 \cdot 2^{k+1} + 4 \cdot 2^{2k-1} + 10$$

Bukti. Diketahui graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ di mana $n = 2^k$ dengan $k \geq 2$ bilangan bulat. Simpul pada graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ akan dipartisi menjadi dua, yaitu

$$\begin{aligned} V_1 &= \{0, 2^{k-1}\} \\ V_2 &= \{0, 1, 2, 3, \dots, 2^k - 1\} \setminus V_1 \end{aligned}$$

Perhatikan,

- a. Kasus $u_1, v_1 \in V_1$ dengan $u_1 \neq v_1$

Diketahui bahwa banyak simpul di V_1 sebanyak dua. Lebih jauh, kedua simpul di V_1 terhubung satu dengan yang lainnya. Sehingga banyak simpul yang jaraknya dengan

simpul u_1 kurang dari jarak ke simpul v_1 adalah tidak ada, yaitu $n_{u_1}(u_1v_1) = 1$, dan begitu sebaliknya $n_{v_1}(u_1v_1) = 1$. Oleh karena itu, berdasarkan definisi Padmakar-Ivan diperoleh

$$\sum_{u_1v_1=e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{v_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) = 1 + 1 = 2$$

b. Kasus $u_1 \in V_1$ dan $v_2 \in V_2$

Semua simpul di V_1 bertetangga dengan simpul di V_2 . Oleh karena itu, banyak simpul yang jaraknya dengan simpul u_1 kurang dari jarak ke simpul v_2 adalah semua simpul di V_2 kecuali v_2 itu sendiri. Dengan kata lain, $n_{u_1}(u_1v_2) = 2^k - 3$. Akan tetapi, banyak simpul yang jaraknya dengan simpul v_2 kurang dari jarak ke u_1 adalah tidak ada atau $n_{v_2}(u_1v_2) = 1$. Selanjutnya banyaknya sisi yang menghubungkan V_1 ke V_2 (tidak untuk sebaliknya) sama dengan $(2^{k-1} - 1) \cdot 3$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{u_1v_2=e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) &= ((2^k - 3) + 1)(2^{k-1} - 1) \cdot 3 \\ &= (2^k - 2)(2^{k-1} - 1)3 \\ \sum_{u_1v_2=e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) &= -3 \cdot 2^{k+1} + 3 \cdot 2^{2k-1} + 6 \end{aligned}$$

c. Kasus $v_1 \in V_2$ dan $u_2 \in V_1$

Sebarang simpul $v_1 \in V_2$ dan $u_2 \in V_1$ bertetangga. Oleh karena itu, banyak simpul yang jaraknya dengan simpul v_1 kurang dari u_2 adalah tidak ada atau $n_{v_2}(v_1u_2) = 1$. Akan tetapi banyak simpul yang jaraknya dengan simpul u_2 kurang dari v_1 adalah semua simpul di V_2 kecuali v_1 itu sendiri. Dengan kata lain, $n_{u_1}(v_1u_2) = 2^k - 3$. Selanjutnya banyak sisi yang menghubungkan V_2 ke V_1 (tidak untuk sebaliknya) sama dengan $2^{k-1} - 1$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{v_2u_1=e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{v_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{u_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) &= (1 + (2^k - 3))(2^{k-1} - 1) \\ &= (2^k - 2)(2^{k-1} - 1) \\ \sum_{v_2u_1=e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) &= -2^{k+1} + 2^{2k-1} + 2 \end{aligned}$$

Dari penjelasan a), b), dan c), diperoleh

$$\begin{aligned} PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) &= \sum_{uv=e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_u(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_v(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) \\ &= \sum_{u_1v_1=e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e) + n_{v_1}(e)) + \sum_{u_1v_2=e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e) + n_{v_2}(e)) \\ &\quad + \sum_{v_1u_2=e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{v_1}(e) + n_{u_2}(e)) \\ &= 2 + (-3 \cdot 2^{k+1} + 3 \cdot 2^{2k-1} + 6) + (-2^{k+1} + 2^{2k-1} + 2) \\ PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) &= -4 \cdot 2^{k+1} + 4 \cdot 2^{2k-1} + 10 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa indeks Padmakar-Ivan dari graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah $PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = -4 \cdot 2^{k+1} + 4 \cdot 2^{2k-1} + 10$ ■

Lemma 4.2. Misal diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf koprima prima dari grup \mathbb{Z}_n . Jika $n = 3^k$ dengan $k \geq 2$ bilangan bulat, maka indeks Padmakar-Ivan dari graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah

$$PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = -2 \cdot 3^{k+2} + 3^{2k+1} + 33$$

Bukti. Diketahui graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ di mana $n = 3^k$ dengan $k \geq 2$ bilangan bulat. Simpul pada graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ akan dipartisi menjadi dua, yaitu

$$\begin{aligned} V_1 &= \{0, 3^{k-1}, 2 \cdot 3^{k-1}\} \\ V_2 &= \{0, 1, 2, 3, \dots, 3^k - 1\} \setminus V_1 \end{aligned}$$

Perhatikan,

- a. Kasus $u_1, v_1 \in V_1$ dengan $u_1 \neq v_1$

Diketahui bahwa banyak simpul di V_1 sebanyak tiga. Lebih jauh, kedua simpul di V_1 terhubung satu dengan yang lainnya. Sehingga banyak simpul yang jaraknya dengan simpul u_1 kurang dari jarak ke simpul v_1 adalah tidak ada, yaitu $n_{u_1}(u_1 v_1) = 1$, dan begitu juga sebaliknya $n_{v_1}(u_1 v_1) = 1$. Selanjutnya banyaknya sisi yang menghubungkan semua simpul V_1 sama dengan 3. Oleh karena itu, diperoleh

$$\sum_{u_1 v_1 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{v_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) = (1 + 1) \cdot 3 = 6$$

- b. Kasus $u_1 \in V_1$ dan $v_2 \in V_2$

Semua simpul di V_1 bertetangga dengan simpul di V_2 . Oleh karena itu, banyak simpul yang jaraknya dengan simpul u_1 kurang dari jarak ke simpul v_2 adalah semua simpul di V_2 kecuali v_2 itu sendiri. Dengan kata lain, $n_{u_1}(u_1 v_2) = 3^k - 4$. Akan tetapi, banyak simpul yang jaraknya dengan simpul v_2 kurang dari jarak ke u_1 adalah tidak ada atau $n_{v_2}(u_1 v_2) = 1$. Selanjutnya banyaknya sisi yang menghubungkan V_1 ke V_2 (tidak untuk sebaliknya) sama dengan $(3^{k-1} - 1) \cdot 6$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{u_1 v_2 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) &= ((3^k - 4) + 1)(3^{k-1} - 1) \cdot 6 \\ &= (3^k - 3)(3^{k-1} - 1)6 \end{aligned}$$

$$\sum_{u_1 v_2 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) = 2 \cdot 3^{2k} - 4 \cdot 3^{k+1} + 18$$

- c. Kasus $v_1 \in V_2$ dan $u_2 \in V_1$

Sebarang simpul $v_1 \in V_2$ dan $u_2 \in V_1$ bertetangga. Oleh karena itu, banyak simpul yang jaraknya dengan simpul v_1 kurang dari u_2 adalah tidak ada atau $n_{v_1}(v_1 u_2) = 1$. Akan tetapi banyak simpul yang jaraknya dengan simpul u_2 kurang dari v_1 adalah semua simpul di V_2 kecuali v_1 itu sendiri. Dengan kata lain, $n_{u_1}(v_1 u_2) = 3^k - 4$. Selanjutnya banyak sisi yang menghubungkan V_2 ke V_1 (tidak untuk sebaliknya) sama dengan $(3^{k-1} - 1) \cdot 3$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{v_2 u_1 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{v_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{u_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) &= (1 + (3^k - 4))(3^{k-1} - 1) \cdot 3 \\ &= (3^k - 3)(3^{k-1} - 1)3 \\ \sum_{v_2 u_1 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) &= 3^{2k} - 2 \cdot 3^{k+1} + 9 \end{aligned}$$

Dari penjelasan a), b), dan c), diperoleh

$$\begin{aligned} PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) &= \sum_{uv=e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_u(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_v(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) \\ &= \sum_{u_1 v_1 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{v_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) \\ &\quad + \sum_{u_1 v_2 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) \\ &\quad + \sum_{v_1 u_2 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{v_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{u_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) \\ &= 6 + (2 \cdot 3^{2k} - 4 \cdot 3^{k+1} + 18) + (3^{2k} - 2 \cdot 3^{k+1} + 9) \\ PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) &= -2 \cdot 3^{k+2} + 3^{2k+1} + 33 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa indeks Padmakar-Ivan dari graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah $PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = -2 \cdot 3^{k+2} + 3^{2k+1} + 33$ ■

Dari Lemma 1 dan Lemma 2 diperoleh rumus umum indeks Padmakar Ivan untuk kasus $p = 2$ dan $p = 3$. Hal ini dapat diperumum untuk sebarang bilangan prima dan tertuang dalam teorema di bawah ini

Teorema 4.3. Misal diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf koprima prima dari grup \mathbb{Z}_n . Jika $n = p^k$ dengan $k \geq 2$ bilangan bulat, maka indeks Padmakar-Ivan dari graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah

$$PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = p^{2k+1} - 2p^{k+2} + p^3 + p^2 - p$$

Bukti. Pada pembuktian ini akan dipartisi himpunan V menjadi dua partisi, yaitu

$$\begin{aligned} V_1 &= \{0p^{k-1}, 1p^{k-1}, 2p^{k-1}, \dots, (p-1)p^{k-1}\} \\ V_2 &= \{0, 1, 2, 3, \dots, p^k - 1\} \setminus V_1 \end{aligned}$$

Perhatikan,

- a. Kasus $u_1, v_1 \in V_1$ dengan $u_1 \neq v_1$

Semua verteks di V_1 terhubung satu dengan yang lainnya, sehingga graf yang terbentuk adalah graf lengkap. Sehingga banyak sisi yang terbentuk dari dua verteks berbeda di V_1 , yaitu u_1 dan v_1 dengan $u_1 \neq v_1 \in V_1$, adalah S_{p-1} . Oleh karena itu, berdasarkan definisi Padmakar-Ivan diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{u_1 v_1 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{v_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) &= (1 + 1)S_{p-1} \\ &= 2 \left(\frac{1}{2}(p-1)p \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{u_1 v_1 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{v_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) = p^2 - p$$

b. Kasus $u_1 \in V_1$ dan $v_2 \in V_2$

Sebarang simpul $u_1 \in V_1$ dan $v_2 \in V_2$ bertetangga. Oleh karena itu, banyak simpul yang jaraknya dengan simpul u_1 kurang dari v_2 adalah semua simpul di V_2 kecuali v_2 itu sendiri. Dengan kata lain, $n_{u_1}(u_1 v_2) = p^k - p - 1$. Akan tetapi, banyak simpul yang jaraknya dengan simpul v_2 kurang dari u_1 adalah tidak ada atau $n_{v_2}(u_1 v_2) = 1$. Selanjutnya banyaknya sisi yang menghubungkan V_1 ke V_2 (tidak untuk sebaliknya) sama dengan $(p^{k-1} - 1)S_p$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{u_1 v_2 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) &= ((p^k - p - 1) + 1)(p^{k-1} - 1)S_p \\ &= (p^k - p)(p^{k-1} - 1) \left(\frac{1}{2} p(p + 1) \right) \\ \sum_{u_1 v_2 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) &= -p^{k+1} - p^{k+2} + \frac{1}{2} p^{2k+1} + \frac{1}{2} p^{2k} + \frac{1}{2} p^3 + \frac{1}{2} p^2 \end{aligned}$$

c. Kasus $v_1 \in V_2$ dan $u_2 \in V_1$

Sebarang simpul $v_2 \in V_2$ dan $u_1 \in V_1$ bertetangga. Oleh karena itu, banyak simpul yang jaraknya dengan simpul v_2 kurang dari u_1 adalah tidak ada atau $n_{v_2}(v_2 u_1) = 1$. Akan tetapi banyak simpul yang jaraknya dengan simpul u_1 kurang dari v_2 adalah semua simpul di V_2 kecuali v_2 itu sendiri. Dengan kata lain, $n_{u_1}(v_2 u_1) = p^k - p - 1$. Selanjutnya banyaknya sisi yang menghubungkan V_2 ke V_1 (tidak untuk sebaliknya) sama dengan $(p^{k-1} - 1)S_{p-1}$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{v_2 u_1 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) &= (1 + (p^k - p - 1))(p^{k-1} - 1)S_{p-1} \\ &= (p^k - p)(p^{k-1} - 1) \left(\frac{1}{2} (p - 1)p \right) \\ \sum_{v_2 u_1 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) &= p^{k+1} - p^{k+2} + \frac{1}{2} p^{2k+1} - \frac{1}{2} p^{2k} + \frac{1}{2} p^3 - \frac{1}{2} p^2 \end{aligned}$$

Dari penjelasan a), b), dan c), diperoleh

$$\begin{aligned} PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) &= \sum_{uv \in e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_u(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_v(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) \\ &= \sum_{u_1 v_1 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{v_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) \\ &\quad + \sum_{u_1 v_2 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) \\ &\quad + \sum_{v_2 u_1 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) \\ &= (p^2 - p) + \left(-p^{k+1} - p^{k+2} + \frac{1}{2} p^{2k+1} + \frac{1}{2} p^{2k} + \frac{1}{2} p^3 + \frac{1}{2} p^2 \right) \\ &\quad + \left(p^{k+1} - p^{k+2} + \frac{1}{2} p^{2k+1} - \frac{1}{2} p^{2k} + \frac{1}{2} p^3 - \frac{1}{2} p^2 \right) \end{aligned}$$

$$PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = p^{2k+1} - 2p^{k+2} + p^3 + p^2 - p$$

Jadi, terbukti bahwa indeks Hyper-Wiener dari graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah $PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = p^{2k+1} - 2p^{k+2} + p^3 + p^2 - p$. ■

Teorema 4.4. Misal diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf koprima prima dari grup \mathbb{Z}_n . Jika $n = p^k$ dengan $k \geq 2$ bilangan bulat, maka indeks Szeged dari graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah

$$Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = -p^{k+1} - 2p^{k+2} + p^{2k+1} + p^3 + \frac{3}{2}p^2 - \frac{1}{2}p$$

Bukti. Dengan asumsi yang sama di pembuktian Teorema 4.3, maka diperoleh

a. Kasus $u_1, v_1 \in V_1$ dengan $u_1 \neq v_1$

$$\begin{aligned} \sum_{u_1 v_1 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) \cdot n_{v_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) &= (1 \cdot 1)S_{p-1} \\ &= \frac{1}{2}(p-1)p \\ \sum_{u_1 v_1 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{v_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) &= \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p \end{aligned}$$

b. Kasus $u_1 \in V_1$ dan $v_2 \in V_2$

$$\begin{aligned} \sum_{u_1 v_2 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) \cdot n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) &= ((p^k - p - 1) \cdot 1)(p^{k-1} - 1)S_p \\ &= (p^k - p - 1)(p^{k-1} - 1) \left(\frac{1}{2}p(p+1) \right) \\ \sum_{u_1 v_2 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) \cdot n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) & \\ &= -\frac{3}{2}p^{k+1} - p^{k+2} + \frac{1}{2}p^{2k+1} + \frac{1}{2}p^{2k} - \frac{1}{2}p^k + \frac{1}{2}p^3 + p^2 + \frac{1}{2}p \end{aligned}$$

c. Kasus $v_1 \in V_2$ dan $u_2 \in V_1$

$$\begin{aligned} \sum_{v_2 u_1 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) \cdot n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) &= (1 \cdot (p^k - p - 1))(p^{k-1} - 1)S_{p-1} \\ &= (p^k - p - 1)(p^{k-1} - 1) \left(\frac{1}{2}(p-1)p \right) \\ \sum_{v_2 u_1 = e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) & \\ &= \frac{1}{2}p^{k+1} - p^{k+2} + \frac{1}{2}p^{2k+1} - \frac{1}{2}p^{2k} + \frac{1}{2}p^k + \frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{2}p \end{aligned}$$

Dari penjelasan a), b), dan c), diperoleh

$$\begin{aligned} Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) &= \sum_{uv=e \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_u(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) \cdot n_v(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) \\ &= \sum_{u_1 v_1 \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) \cdot n_{v_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) + \sum_{u_1 v_2 \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) \cdot n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) \\ &\quad + \sum_{v_2 u_1 \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_{v_2}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) \cdot n_{u_1}(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p\right) + \left(-\frac{3}{2}p^{k+1} - p^{k+2} + \frac{1}{2}p^{2k+1} + \frac{1}{2}p^{2k} - \frac{1}{2}p^k + \frac{1}{2}p^3 + p^2 + \frac{1}{2}p\right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2}p^{k+1} - p^{k+2} + \frac{1}{2}p^{2k+1} - \frac{1}{2}p^{2k} + \frac{1}{2}p^k + \frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{2}p\right) \\
 &= \left(-\frac{3}{2}p^{k+1} - p^{k+2} + \frac{1}{2}p^{2k+1} + \frac{1}{2}p^{2k} - \frac{1}{2}p^k + \frac{1}{2}p^3 + \frac{3}{2}p^2\right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2}p^{k+1} - p^{k+2} + \frac{1}{2}p^{2k+1} - \frac{1}{2}p^{2k} + \frac{1}{2}p^k + \frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{2}p\right) \\
 Sz(\Gamma_G) &= -p^{k+1} - 2p^{k+2} + p^{2k+1} + p^3 + \frac{3}{2}p^2 - \frac{1}{2}p
 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa indeks Szeged dari graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah $Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = -p^{k+1} - 2p^{k+2} + p^{2k+1} + p^3 + \frac{3}{2}p^2 - \frac{1}{2}p$ ■

Selanjutnya perhatikan,

$$\begin{aligned}
 Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) &= -p^{k+1} - 2p^{k+2} + p^{2k+1} + p^3 + \frac{3}{2}p^2 - \frac{1}{2}p \\
 &= \left((p^{2k+1} - 2p^{k+2} + p^3 + p^2 - p) + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p\right) - p^{k+1} \\
 &= (p^{2k+1} - 2p^{k+2} + p^3 + p^2 - p) - \left(p^{k+1} - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p\right) \\
 Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) &= PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) - \left(p^{k+1} - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p\right)
 \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas, dapat disimpulkan bahwa hubungan indeks Szeged dan Padmakar-Ivan adalah $Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) - \left(p^{k+1} - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p\right)$

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Dari paparan di atas, diperoleh indeks Padmakar-Ivan dan Szeged dari graf koprima prima pada grup bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_n untuk $n = p^k$ di mana p adalah prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat berturut turut adalah $PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = p^{2k+1} - 2p^{k+2} + p^3 + p^2 - p$ dan $Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = -p^{k+1} - 2p^{k+2} + p^{2k+1} + p^3 + \frac{3}{2}p^2 - \frac{1}{2}p$. Lebih jauh, hubungan indeks Padmakar-Ivan dan Szeged adalah $Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) - \left(p^{k+1} - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p\right)$.

6. DAFTAR PUSTAKA

Adhikari, A., & Banerjee, S. (2022). Prime coprime graph of a finite group. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 52(2), 41–59.

Alimon, N. I., Sarmin, N. H., & Erfanian, A. (2020). The Szeged and Wiener indices for coprime graph of dihedral groups. *AIP Conference Proceedings*, 2266(1).

Alimon, N. I., Sarmin, N. H., & Erfanian, A. (2023). ON THE SZEGED INDEX AND ITS NON-COMMUTING GRAPH. *Jurnal Teknologi*, 85(3), 105–110.

Banerjee, S. (2023). The Szeged Index of Power Graph of Finite Groups. *Research Square*, 1–17.

- Chithrabhanu, M. S., & Somasundaram, K. (2022). Padmakar-Ivan index of some types of perfect graphs. *Discrete Mathematics Letters*, 9, 92–99.
- Das, K. C., Ashrafi, A. R., & Ghalavand, A. (2020). Comparison between Szeged indices of graphs. *Quaestiones Mathematicae*, 43(8), 1031–1046.
- Gazir S, A., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2020). Some Properties of Coprime Graph of Dihedral Group D_{2n} When n is a Prime Power. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 3(1), 34–38.
- Ghoffari, L. H., Wardhana, I. G. A. W., & Abdurahim. (2024). Padmakar-Ivan and Randic Indices of Non-Coprime Graph of Modulo Integer Groups. *Majalah Ilmiah Matematika Dan Statistika*, 24(1), 73–84.
- Ghorbani, M., Darafsheh, M. R., & Yousefzadeh, P. (2021). On the Prime Graph of a Finite Group. *Miskolc Mathematical Notes*, 22(1), 201–210.
- Juliana, R., Masriani, M., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Irwansyah, I. (2020). COPRIME GRAPH OF INTEGERS MODULO n GROUP AND ITS SUBGROUPS. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 3(1), 15–18.
- Ma, X., Wei, H., & Yang, L. (2014). The coprime graph of a group. *International Journal of Group Theory*, 3(2), 13–23.
- Syechah, B. N., Asmarani, E. Y., Syarifudin, A. G., Anggraeni, D. P., & Wardhana, I. G. A. W. (2022). Representasi Graf Pangkat Pada Grup Bilangan Bulat Modulo Berorde BilanganPrima. *Evolusi: Journal of Mathematics and Sciences*, 6(2), 99–104.
- Yatin, B. Z., Gayatri, M. R., Wardhana, I. G. A. W., & Prayanti, B. D. A. (2023). Indeks Hyper-Wiener Dan Indeks Padmakar-Ivan Dari Graf Koprime Dari Grup Dihedral. *Jurnal Riset Dan Aplikasi Matematika*, 07(02), 138–147.