



Model Kontrol Pada Ekosistem Perkebunan Teh

Arista Fitri Diana^{1*}, Gilang Romadan², Mia Siti Khumaeroh³,
Lathifatul Aulia⁴, Zakaria Bani Iktiyar⁵

^{1,2,4,5}Institut Teknologi Statistika dan Bisnis Muhammadiyah Semarang

³Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati Bandung

*arista.fitri@itesa.ac.id

ABSTRAK

Teh adalah salah satu tanaman komoditas ekspor di Indonesia. Perkembangan tanaman teh dipengaruhi oleh beberapa faktor baik faktor dari dalam ataupun dari luar. Dalam bidang matematika, pemodelan matematika digunakan untuk menganalisis pertumbuhan tanaman teh dan interaksinya dalam ekosistem. Model matematika pada penelitian ini menggabungkan 3 model utama, yaitu model logistik, model epidemi, dan model predator prey dengan menambahkan kontrol fungisida dan insektisida. Lebih jauh lagi dilakukan analisis kestabilan lokal dan penyelesaian model kontrol dengan prinsip Maximum Pontryagin. Penyelesaian model menghasilkan 5 titik kesetimbangan. Dengan menggunakan metode Routh Hurwitz diperoleh titik kesetimbangan ke-5 stabil asimtotik lokal dengan bilangan reproduksi dasar $\mathcal{R}_0 = 0,99$. Karena $\mathcal{R}_0 < 1$, dapat disimpulkan bahwa tidak ada penyebaran penyakit pada tanaman teh selama periode 5 tahun. Kontrol diberikan untuk mengurangi serangan hama dan penyakit. Setelah pemberian kontrol, populasi teh terinfeksi berkurang 93,21%, hama *Empoasca* berkurang 99,47%, dan hama ulat daun berkurang 99,31% jika dibandingkan dengan model tanpa kontrol.

Kata Kunci: Tanaman Teh, Model Dinamik, Fungisida, Insektisida, Kontrol Optimal.

ABSTRACT

*Tea plants are one of the commodities in Indonesia. In their development, the plantation ecosystem is heavily influenced by several factors, both internal and external factors. In the field of applied mathematics, mathematical modelling can be used to analyze the development of tea plant growth and their interaction each other in their ecosystem. The mathematical model in this research is combining three main models, there are logistic model, epidemiological model, and predator prey model by adding fungicide and insecticide controls. Furthermore, local stability analysis is carried out and the optimal control problem is solved by Pontryagin maximum principle. The results of the analysis obtained five equilibrium points. Local stability analysis was carried out using the Routh Hurwitz criteria which showed the fifth equilibrium point is locally asymptotically stable. The basic reproduction number in the model is 0,99. Because $\mathcal{R}_0 < 1$, it can be concluded that there is no spread of disease in the tea plantation ecosystem after a period of 5 years. The control provided can reduce pest and disease attacks. After being given control, the population of infected tea plants decreased by 93,21%, *Empoasca* pests decreased by 99,47%, and leaf roller caterpillars decreased by 99,31% compared to the model that was not given control.*

Keywords: Tea Plantation, Dynamical Model, Fungicide, Insecticide, Optimal Control.

1. PENDAHULUAN

Teh merupakan salah satu komoditas ekspor di Indonesia. Salah satu perkebunan teh di Jawa Tengah yang dijadikan lokasi penelitian ini adalah perkebunan teh PT RSM (Rumpun Sari Medini) yang terletak di Kendal. Setiap ekosistem perkebunan teh mempunyai permasalahan yang berbeda-beda, baik terkait hama, penyakit, kondisi kesuburan tanah, dan faktor lainnya (Eskundari, 2020). Permasalahan pertumbuhan populasi tanaman teh pada penelitian ini berkaitan dengan hama dan penyakit. Terdapat tiga organisme dominan yang mengganggu pertumbuhan tanaman teh di PT RSM, yaitu hama *Empoasca*, ulat penggulung daun, dan jamur (Strzelecka et al., 2020). Dalam matematika, interaksi tanaman teh dengan organisme pengganggu (hama dan penyakit) dapat dimodelkan dengan model dinamik sehingga pola interaksi antar individu dalam ekosistem dapat diketahui kondisinya (stabil atau tidak stabil). Selanjutnya model pengendalian dengan kontrol digunakan untuk menekan laju pertumbuhan hama dan penyakit. Pada penelitian ini fungisida dan pestisida merupakan dua parameter kontrol yang digunakan untuk mengendalikan pertumbuhan hama dan penyakit (Naji et al., 2016). Pentingnya penelitian ini yaitu untuk menjelaskan bagaimana kondisi ekosistem perkebunan teh PT RSM. Pada penelitian ini memberikan gambaran populasi yang mempengaruhi pertumbuhan tanaman teh. Populasi terbesar yang dominan mengganggu pertumbuhan tanaman teh akan menjadi fokus dalam penelitian ini. Model kontrol diberikan pada populasi pengganggu tanaman teh yang paling dominan, yaitu hama dan penyakit (Hao et al., 2016). Pengendalian yang optimal dapat digunakan untuk mengetahui cara terbaik dalam menangani hama dan penyakit, sehingga diharapkan dapat digunakan PT. RSM dalam mengambil langkah penanganan ledakan hama dan penyakit agar tanaman teh dapat tumbuh dengan optimal. Model dinamik Lotka Volterra telah dipelajari oleh banyak peneliti, diantaranya (Shasi Kant, 2017) dan (Tesa. N. P, 2018). Pada penelitian Shasi Kant, model Lotka Volterra menggunakan interaksi antara tiga variabel dengan migrasi dan penyakit, kemudian pada penelitian Tes Nur Padilah menggunakan model dinamik interaksi antara padi dan tiga hama. Model dinamik (Shabbir et al., 2019) menggunakan model predator-prey dan model epidemi SI (*Susceptible-Infected*) dengan migrasi dan antar semua populasi. Model (Shasi Kant, 2017) menggunakan model predator-prey tanpa penyakit dan adanya interaksi antar hama. Dalam tulisan ini, menggabungkan model dinamik *predator-prey*, model epidemi SI (*Susceptible-Infected*), dan model kontrol optimal. Jadi perbedaan model pada penelitian ini dengan penelitian sebelumnya yaitu pada penelitian ini memodifikasi model dinamik dengan menghilangkan populasi yang bermigrasi, menambahkan penyakit dan pengendaliannya, serta menghilangkan interaksi hama dan penyakit. Model dinamik interaksi tanaman teh dengan hama dan penyakit dimodelkan dengan mengikuti model predator-prey untuk interaksi tanaman teh dan hama, sedangkan model interaksi tanaman teh dan penyakit mengikuti model epidemi SI, kemudian model dinamik pertumbuhan teh mengikuti model logistik (Aldila et al., 2020-Bessonov et al., 2019). Ketiga model tersebut kemudian ditambahkan kontrol sebagai upaya pengendalian hama dan penyakit. Adapun simulasi model pada penelitian ini menggunakan data pada PT RSM tahun 2015-2019.

Penelitian ini membahas model predator-prey dan model epidemi tanpa migrasi populasi pada ekosistem perkebunan teh dengan menambahkan kontrol untuk pengendalian yang optimal. Selanjutnya akan dianalisis eksistensi dan kestabilan titik kestimbangan dari model

dinamik. Model pada penelitian ini memiliki lima titik kesetimbangan. Hasil analisis menunjukkan terdapat satu titik kesetimbangan endemik dan empat lainnya titik kesetimbangan non-endemik. Selain itu, dianalisis juga Bilangan Reproduksi Dasar (\mathcal{R}_0) untuk menentukan kestabilan dari titik kesetimbangan. Adapun \mathcal{R}_0 diperoleh dari *Next Generation Matrix* (NGM). Dengan menggunakan kriteria Routh Hurwitz dari matriks Jacobian yang dievaluasi pada titik kesetimbangan, akan dianalisis kestabilan lokal dari sistem di sekitar titik kesetimbangan tersebut. Selanjutnya kestabilan global akan dianalisis dengan fungsi Lyapunov. Titik kesetimbangan non-endemik stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 > 1$. Kemudian kontrol optimal diperoleh dari prinsip Maksimum Pontryagin (Syamsir, 2020). Simulasi numerik juga dilakukan untuk menganalisis hasil yang diperoleh.

2. METODE

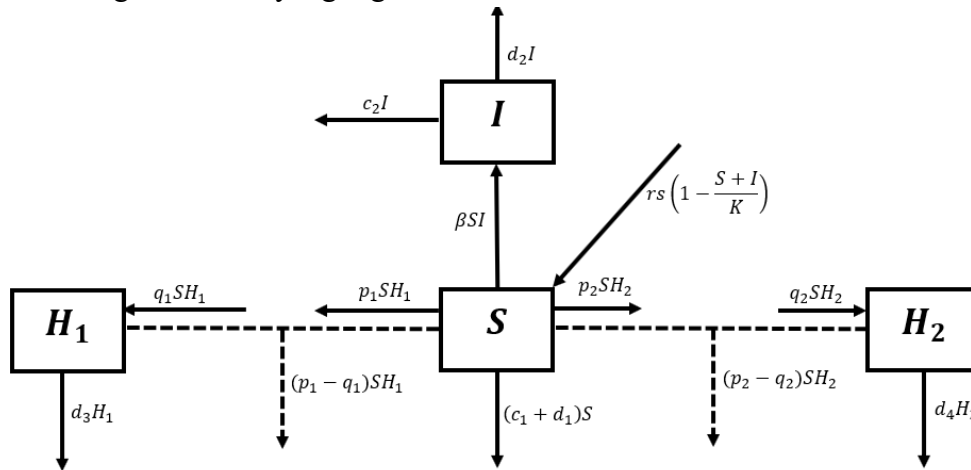
Metode penelitian yang digunakan dalam artikel ini yaitu dimulai dari formulasi model, kemudian dilanjutkan dengan pencarian titik kesetimbangan, selanjutnya dilakukan analisis titik kesetimbangan model dengan metode Routh Hurwitz untuk kestabilan lokal dan metode Lyapunov untuk kestabilan global. Kemudian ditambahkan model kontrol sebagai pengendalian terhadap hama dan penyakit.

2.1. Formulasi Model

Kelompok individu dalam model dinamik diterapkan pada tanaman teh, hama *Empoasca*, ulat penggulung, dan infeksi jamur pada daun teh. Interaksi antara tanaman teh dengan hama mengikuti model predator-pey dan interaksi antara tanaman teh dengan penyakit mengikuti model epidemi SI. Pengelompokan variabel terdiri dari 4 subpopulasi yaitu, subpopulasi tanaman teh sehat, subpopulasi tanaman teh terinfeksi, subpopulasi hama *Empoasca*, subpopulasi ulat penggulung daun. Adapun beberapa asumsi yang digunakan dalam model matematis pada penelitian ini yaitu :

- a) Populasi dalam ekosistem bersifat tertutup.
- b) Subpopulasi tanaman teh sehat mengikuti model logistik.
- c) Tidak ada interaksi dan kompetisi antar tiga predator.
- d) Daya dukung lingkungan untuk tanaman teh bersifat konstan.
- e) Kontrol fungisida diberikan pada subpopulasi teh terinfeksi.
- f) Kontrol insektisida diberikan pada subpopulasi hama.
- g) Simulasi menggunakan software maple 12 dan matlab 2018.

Berikut diagram model yang digunakan dalam artikel ini,



Gambar 1. Diagram Transfer Model Interaksi Tanaman Teh, Hama, dan Penyakit

Tabel 1. Deskripsi Parameter

No	Persentase Ketuntasan
K	Daya Dukung Lingkungan
r	Laju Pertumbuhan Intrinsik
β	Koefisien Infeksi Teh Sehat
p_1	Laju Interaksi Teh Sehat dengan Hama <i>Empoasca</i>
p_2	Laju Interaksi Teh Sehat dengan Ulat Penggulung Daun
q_1	Koefisien Konfersi Interaksi Teh Sehat dengan Hama <i>Empoasca</i>
q_2	Koefisien Konfersi Interaksi Teh Sehat dengan Ulat Penggulung Daun
c_1	Laju Pemanenan Tanaman Teh
c_2	Laju Kematian Teh karena Terinfeksi
d_1	Laju Kematian Alami Teh Sehat
d_2	Laju Kematian Alami Teh Terinfeksi
d_3	Laju Kematian Alami Hama <i>Empoasca</i>
d_4	Laju Kematian Alami Ulat Penggulung Daun

Penelitian ini mengembangkan model dari (Shashi Kant., 2017) namun parameter migrasi dihilangkan karena menyesuaikan dengan kondisi nyata pada ekosistem teh di PT. Rumpun Sari Medini. Selanjutnya dihilangkan pula interaksi antar predator dan interaksi antar predator dengan prey yang terinfeksi. Lebih jauh lagi, penelitian ini juga mengembangkan model dari (Bezabih et al., 2021) yaitu dengan menerapkan model predator-prey pada lingkup epidemiologi ke dalam ekosistem perkebunan teh. Dari kedua sumber terdekat, penelitian ini kemudian memodifikasi model matematika pada ekosistem perkebunan teh dengan menghilangkan proses migrasi dan interaksi antar predator beserta interaksi antar predator dengan prey yang terinfeksi. Sehingga dapat dibentuk model matematika yang direpresentasikan sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = rS \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI - p_1SH_1 - p_2SH_2 - (c_1 + d_1)S \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - (c_2 + d_2)I \\ \frac{dH_1}{dt} = q_1SH_1 - d_3H_1 \\ \frac{dH_2}{dt} = q_2SH_2 - d_4H_2 \end{cases} \quad (1)$$

Dengan kondisi awal $S(0) > 0, I(0) \geq 0, H_1(0) \geq 0, H_2(0) \geq 0$ dan parameter yang diberikan pada Tabel 1.

2.2. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan adalah kondisi dimana tidak terjadi perubahan pada setiap populasi dalam waktu yang lama, sehingga sistem dinamik dari model dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= rS \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI - p_1SH_1 - p_2SH_2 - (c_1 + d_1)S = 0 \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (c_2 + d_2)I = 0 \\ \frac{dH_1}{dt} &= q_1SH_1 - d_3H_1 = 0 \\ \frac{dH_2}{dt} &= q_2SH_2 - d_4H_2 = 0 \end{aligned}$$

Sistem pada model (1) menghasilkan 5 titik kesetimbangan, yaitu:

$$\begin{aligned} E^1 &= (S^1 = 0, I^1 = 0, H_1^1 = 0, H_2^1 = 0) \\ E^2 &= \left(S^2 = \frac{c_2 + d_2}{\beta}, I^2 = -\frac{-rK\beta + rc_2 + rd_2 + c_1K\beta + d_1K\beta}{\beta(r + \beta K)}, H_1^2 = 0, H_2^2 = 0 \right) \\ E^3 &= \left(S^3 = \frac{d_4}{q_2}, I^3 = 0, H_1^3 = 0, H_2^3 = -\frac{-rKq_2 + rd_4 + c_1Kq_2 + d_1Kq_2}{p_2Kq_2} \right) \\ E^4 &= \left(S^4 = \frac{d_3}{q_1}, I^4 = 0, H_1^4 = -\frac{-rKq_1 + rd_3 + c_1Kq_1 + d_1Kq_1}{p_1Kq_1}, H_2^4 = 0 \right) \\ E^5 &= \left(S^5 = -\frac{K(-r + c_1 + d_1)}{r}, I^5 = 0, H_1^5 = 0, H_2^5 = 0 \right) \end{aligned}$$

2.3. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar berperan penting dalam analisis infeksi penyakit yang mendeskripsikan jumlah rata-rata kejadian baru yang disebabkan oleh penyebaran penyakit dari individu yang terinfeksi. Besarnya bilangan reproduksi dasar yang disimbolkan dengan \mathfrak{R}_0 menyatakan, jika nilai $\mathfrak{R}_0 > 1$ maka setiap individu yang sakit (teh terinfeksi) dapat menularkan penyakitnya ke lebih dari satu individu. Pada kondisi tersebut titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil, namun sebaliknya jika $\mathfrak{R}_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal, sehingga kondisi penyebaran penyakit dapat terkendali. Bilangan reproduksi dasar dapat dicari dengan menggunakan matriks NGM (*Next Generation Matrix*). Berikut perhitungan bilangan reproduksi dasar pada model dinamik Interaksi Tanaman Teh, Hama, dan Penyakit.

Dari model dinamik (1) dapat ditentukan,

$$\mathcal{F}(E^5) = \left[-\frac{\beta K(-r + c_1 + d_1)}{r} \right]$$

$$V = [c_2 + d_2]$$

Untuk mencari bilangan reproduksi dasar, maka akan ditentukan radius spectral dari matriks generation FV^{-1} dan diperoleh formula bilangan reproduksi dasar sebagai berikut,

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta K(r - c_1 - d_1)}{r(c_2 + d_2)}$$

2.4. Eksistensi Titik Kesetimbangan

Sebelum menganalisis kestabilan titik kesetimbangan maka akan di analisis terlebih dahulu eksistensi dari masing-masing titik kesetimbangan. Adapun analisis eksistensi dari titik kesetimbangan yang diperoleh.

$E^1 = (S^1 = 0, I^1 = 0, H_1^1 = 0, H_2^1 = 0)$ selalu eksis

$$E^2 = \left(S^2 = \frac{c_2 + d_2}{\beta}, I^2 = -\frac{-rK\beta + rc_2 + rd_2 + c_1K\beta + d_1K\beta}{\beta(r + \beta K)}, H_1^2 = 0, H_2^2 = 0 \right)$$

Titik kesetimbangan 2 eksis jika memenuhi,

$$rK\beta > rc_2 + rd_2 + c_1K\beta + d_1K\beta$$

$$E^3 = \left(S^3 = \frac{d_4}{q_2}, I^3 = 0, H_1^3 = 0, H_2^3 = -\frac{-rKq_2 + rd_4 + c_1Kq_2 + d_1Kq_2}{p_2Kq_2} \right)$$

Titik kesetimbangan 3 eksis jika memenuhi,

$$rKq_2 > rd_4 + c_1Kq_2 + d_1Kq_2$$

$$E^4 = \left(S^4 = \frac{d_3}{q_1}, I^4 = 0, H_1^4 = -\frac{-rKq_1 + rd_3 + c_1Kq_1 + d_1Kq_1}{p_1Kq_1}, H_2^4 = 0 \right)$$

Titik kesetimbangan 4 eksis jika memenuhi,

$$rKq_1 > rd_3 + c_1Kq_1 + d_1Kq_1$$

$$E^5 = \left(S^5 = -\frac{K(-r + c_1 + d_1)}{r}, I^5 = 0, H_1^5 = 0, H_2^5 = 0 \right)$$

Titik kesetimbangan 5 eksis jika memenuhi,

$$r > c_1 + d_1$$

2.5. Kestabilan Lokal Titik Endemik

Teorema 1 Diberikan $\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta K(r - c_1 - d_1)}{r(c_2 + d_2)}$, Titik kesetimbangan endemik $\mathcal{E}^2(S^2, E^2, H_1^2, H_2^2)$

stabil jika $\mathfrak{R}_0 > 1$ dan tidak stabil jika $\mathfrak{R}_0 < 1$

Bukti.

Untuk membuktikan kestabilan titik endemik akan stabil jika $\mathfrak{R}_0 > 1$, kita menggunakan analisis karakteristik polynomial. Langkah awal yang dilakukan yaitu linearisasi system (1).

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} S \\ I \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial H_1} & \frac{\partial f_1}{\partial H_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial H_1} & \frac{\partial f_2}{\partial H_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial H_1} & \frac{\partial f_3}{\partial H_2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial H_1} & \frac{\partial f_4}{\partial H_2} \end{bmatrix} (S^2, E^2, H_1^2, H_2^2) \begin{bmatrix} \bar{S} \\ \bar{I} \\ \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \end{bmatrix}$$

Dengan aplikasi maple diperoleh :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} S \\ I \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{(S+I)}{K} \right) - \frac{rS}{K} - \beta I - p_1 H_1 - p_2 H_2 - c_1 - d_1 & -\frac{rS}{K} - \beta S & -p_1 S & -p_2 S \\ \beta I & \beta S - c_2 - d_2 & 0 & 0 \\ q_1 H_1 & 0 & q_1 S - d_3 & 0 \\ q_2 H_2 & 0 & 0 & q_2 S - d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{S} \\ \bar{I} \\ \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Selanjutnya substitusikan titik endemik ke persamaan (2) dan diperoleh Matriks Jacobi di titik $\mathcal{E}^2(S^2, E^2, H_1^2, H_2^2)$ dan diperoleh persamaan karakteristik polinomial sebagai berikut:

$$Pol(X) = \frac{1}{Kq_2^3} (X\beta - q_1c_2 - q_1d_2 + d_3\beta)(X\beta - q_2c_2 - q_2d_2 + d_4\beta)(K\beta X^2 + rK\beta c_2 + rK\beta d_2 - K\beta c_1c_2 - K\beta c_1d_2 - K\beta d_1c_2 - K\beta d_1d_2 + Xrd_2 + Xrc_2 - rc_2^2 - 2rc_2d_2 - rd_2^2)$$

Dari persamaan (2), kita gunakan metode Routh Hurwitz untuk menganalisis kestabilan lokal di titik endemik. Titik endemik akan stabil asimtotik local jika:

$$rK\beta c_2 + rK\beta d_2 - K\beta c_1c_2 - K\beta c_1d_2 - K\beta d_1c_2 - K\beta d_1d_2 - rc_2^2 - rd_2^2 - 2rc_2d_2 > 0$$

$$rK\beta c_2 + rK\beta d_2 > K\beta c_1c_2 + K\beta c_1d_2 + K\beta d_1c_2 + K\beta d_1d_2 + rc_2^2 + rd_2^2 + 2rc_2d_2$$

$$rK\beta c_2 + rK\beta d_2 - K\beta c_1c_2 - K\beta c_1d_2 - K\beta d_1c_2 - K\beta d_1d_2 > +rc_2^2 + rd_2^2 + 2rc_2d_2$$

$$K\beta(rc_2 + rd_2 - c_1c_2 - c_1d_2 - d_1c_2 - d_1d_2) > r(c_2^2 + d_2^2 + 2c_2d_2)$$

$$K\beta(r - c_1 - d_1)(c_2 + d_2) > r(c_2 + d_2)^2$$

$$K\beta(r - c_1 - d_1) > r(c_2 + d_2)$$

$$\frac{K\beta(r - c_1 - d_1)}{r(c_2 + d_2)} > 1$$

$$R_0 > 1$$

- $R_0 > 1$
- $q_1c_2 + q_1d_2 > d_3\beta$
- $q_2c_2 + q_2d_2 > d_4\beta$

Terbukti bahwa titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$

2.6. Kestabilan Lokal Titik Bebas Penyakit

Teorema 2 Diberikan $\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta K(r - c_1 - d_1)}{r(c_2 + d_2)}$. Titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal jika $\mathfrak{R}_0 < 1$ and unstable if $\mathfrak{R}_0 > 1$.

Bukti.

Untuk membuktikan kestabilan titik endemik akan stabil jika $\mathfrak{R}_0 < 1$, kita menggunakan analisis karakteristik polinomial. Langkah awal yang dilakukan yaitu linearisasi system (1).

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} S \\ I \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial H_1} & \frac{\partial f_1}{\partial H_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial H_1} & \frac{\partial f_2}{\partial H_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial H_1} & \frac{\partial f_3}{\partial H_2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial H_1} & \frac{\partial f_4}{\partial H_2} \end{bmatrix} (S^5, E^5, H_1^5, H_2^5) \begin{bmatrix} \bar{S} \\ \bar{I} \\ \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \end{bmatrix}$$

Dengan aplikasi maple diperoleh :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} S \\ I \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{(S+I)}{K} \right) - \frac{rS}{K} - \beta I - p_1 H_1 - p_2 H_2 - c_1 - d_1 & -\frac{rS}{K} - \beta S & -p_1 S & -p_2 S \\ \beta I & \beta S - c_2 - d_2 & 0 & 0 \\ q_1 H_1 & 0 & q_1 S - d_3 & 0 \\ q_2 H_2 & 0 & 0 & q_2 S - d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{S} \\ \bar{I} \\ \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Selanjutnya substitusikan titik non-endemik ke persamaan (3) dan diperoleh Matriks Jacobi di titik $\mathcal{E}^5(S^5, E^5, H_1^5, H_2^5)$ dan diperoleh persamaan karakteristik polinomial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \frac{1}{r^3} \left(\left(r \left(1 + \frac{-r + c_1 + d_1}{r} \right) - r - \lambda \right) (-rK\beta + c_1K\beta + d_1K\beta + rc_2 + rd_2 + \lambda r) (-q_1Kr \right. \\ &+ q_1Kc_1 + q_1Kd_1 + d_3r + \lambda r) (-rKq_2 + c_1Kq_2 + d_1Kq_2 + rd_4 \\ &\left. + \lambda r) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Dari persamaan (4), kita gunakan metode Routh Hurwitz untuk menganalisis kestabilan lokal di titik endemik. Titik endemik akan stabil asimtotik local jika:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -r + c_1 + d_1 \\ \lambda_2 &= -\frac{-rK\beta + rc_2 + rd_2 + c_1K\beta + d_1K\beta}{r} \\ \lambda_3 &= -\frac{-q_1Kr + q_1Kc_1 + q_1Kd_1 + d_3r}{r} \\ \lambda_4 &= -\frac{-rKq_2 + c_1Kq_2 + d_1Kq_2 + rd_4}{r} \end{aligned}$$

The disease free equilibrium point will be locally asymptotically stable if :

$$\begin{aligned} rK\beta &< rc_2 + rd_2 + c_1K\beta + d_1K\beta \\ rK\beta - c_1K\beta - d_1K\beta &< rc_2 + rd_2 \\ K\beta(r - c_1 - d_1) &< r(c_2 + d_2) \\ \frac{K\beta(r - c_1 - d_1)}{r(c_2 + d_2)} &< 1 \end{aligned}$$

$$R_0 < 1$$

- $r > c_1 + d_1$
- $R_0 < 1$
- $q_1Kr < q_1Kc_1 + q_1Kd_1 + d_3r$
- $rKq_2 < c_1Kq_2 + d_1Kq_2 + rd_4$

Terbukti bahwa titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal jika if $R_0 > 1$

2.7. Analisis Kontrol Optimal

Model (1) akan dimodifikasi dengan mengurangi laju transmisi penyakit dengan menerapkan control fungisida (u_1) dan mengurangi serangan hama *Empoasca* dan hama ulat penggulong daun dengan menerapkan control insektisida (u_2). Dengan menerapkan dua control pada model (1) maka diperoleh system persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= rS \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI - p_1SH_1 - p_2SH_2 - (c_1 + d_1)S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (c_2 + d_2)I - u_1I \\ \frac{dH_1}{dt} &= q_1SH_1 - d_3H_1 - u_2H_1 \\ \frac{dH_2}{dt} &= q_2SH_2 - d_4H_2 - u_2H_2 \end{aligned} \tag{5}$$

Dengan kondisis awal,

$$S(0) > 0, I(0) > 0, H_1(0) > 0, H_2(0) > 0$$

Fungsi objektif J digunakan untuk mengoptimalkan strategi control yang diberikan pada model (1). Strategi control optimal bertujuan untuk mengontrol biaya terkait infeksi tanaman the, hama *Empoasca*, hama ulat penggulong daun, dan biaya penerapan fungisida dan insektisida.

Fungsi Objektif untuk persamaan (5) didefinisikan:

$$J(U) = \int_0^{tf} \left(\omega_1 I(t) + \omega_2 H_1(t) + \omega_3 H_2(t) + \frac{v_1}{2} u_1^2(t) + \frac{v_2}{2} u_2^2(t) \right) dt \tag{6}$$

Dimana tf adalah waktu akhir dan koefisien $\omega_1, \omega_2, \omega_3, v_1, v_2$ adalah faktor penyeimbang biaya terkait lima bagian penting dari fungsi objektif (6). Untuk mencari nilai kontrol optimal pada u_1^*, u_2^* gunakan ,

$$J(u_1^*, u_2^*) = \min\{J(u_1, u_2) \mid u_1, u_2 \in U\} \tag{7}$$

Fungsi Hamiltonian dari model control (5) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H &= \omega_1 I + \omega_2 H_1 + \omega_3 H_2 + \frac{v_1}{2} u_1^2 + \frac{v_2}{2} u_2^2 \\ &\quad + \lambda_1 \left(rS \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI - p_1SH_1 - p_2SH_2 - (c_1 + d_1)S \right) \\ &\quad + \lambda_2 (\beta SI - (c_2 + d_2)I - u_1I) + \lambda_3 (q_1SH_1 - d_3H_1 - u_2H_1) \\ &\quad + \lambda_4 (q_2SH_2 - d_4H_2 - u_2H_2) \end{aligned} \tag{8}$$

Teorema 3 Kontrol optimal untuk u_1^*, u_2^* dan solusi S^*, I^*, H_1^*, H_2^* pada sistem (5) yang meminimalkan $J(u_1, u_2)$ pada $U = \{u_1, u_2\}$, dimana terdapat variabel adjoint $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ yang memenuhi :

$$\begin{aligned} -\frac{d\lambda_1}{dt} &= -\lambda_1 \left(r - \frac{r(S+I)}{K} - \frac{rS}{K} - \beta I - p_1H_1 - p_2H_2 - c_1 - d_1 \right) - \lambda_2 \beta I - \lambda_3 q_1 H_1 \\ &\quad - \lambda_4 q_2 H_2 \\ -\frac{d\lambda_2}{dt} &= -\omega_1 - \lambda_1 \left(-\frac{rS}{K} - \beta S \right) - \lambda_2 (\beta S - c_2 - d_2 - u_1) \\ -\frac{d\lambda_3}{dt} &= -\omega_2 - \lambda_1 p_1 S - \lambda_3 (q_1 S - d_3 - u_2) \\ -\frac{d\lambda_4}{dt} &= -\omega_3 + \lambda_1 p_2 S - \lambda_4 (q_2 S - d_4 - u_2) \end{aligned}$$

dimana $\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) = \lambda_3(t) = \lambda_4(t_f) = 0$ adalah kondisi transversalitas dengan kontrol optimal $(u_1^*(t), u_2^*(t))$ yang memenuhi kondisi optimal.

Bukti.

Dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin, diperoleh solusi dari kontrol optimal. Diferensialkan persamaan Hamiltonian (7) u_1, u_2 dan evaluasi variable kontrol optimal sebagai berikut:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u_1} = -\lambda_2 I + v_1 u_1$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u_2} = v_2 u_2 - \lambda_3 H_1 - \lambda_4 H_2 \quad (8)$$

Dari persamaan (8), kita peroleh kontrol optimal u_1^*, u_2^* sebagai berikut :

$$u_1^* = \frac{\lambda_1 I}{v_1}$$

$$u_2^* = \frac{\lambda_3 H_1 + \lambda_4 H_2}{v_2}$$

Jadi dapat dituliskan variabel kontrol optimal of u_1^*, u_2^* sebagai :

$$u_1^* = \begin{cases} 0 & \text{jika } \psi_1^* \leq 0 \\ \psi_1^* & \text{jika } 0 \leq \psi_1^* \leq 1 \\ 1 & \text{jika } \psi_1^* \geq 1 \end{cases}$$

$$u_2^* = \begin{cases} 0 & \text{jika } \psi_2^* \leq 0 \\ \psi_2^* & \text{jika } 0 \leq \psi_2^* \leq 1 \\ 1 & \text{jika } \psi_2^* \geq 1 \end{cases}$$

dimana

$$\psi_1^* = \frac{\lambda_1 I}{v_1}$$

$$\psi_2^* = \frac{\lambda_3 H_1 + \lambda_4 H_2}{v_2}$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dengan menggunakan software Maple versi “Maple 15” dan data dari PT RSM 2015-2019 dilakukan simulasi numerik model (1), dengan kondisi awal $S(0) = 3.448.191$ individual, $I(0) = 223$ individual, $H_1(0) = 986$ individual, $H_2(0) = 746$ individual dan nilai parameter yang ditunjukkan pada Tabel 2.

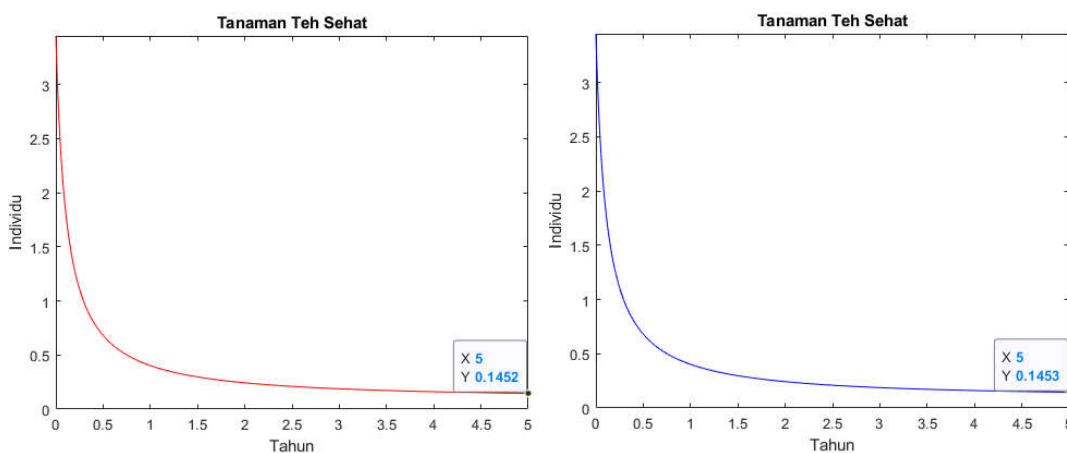
Tabel 2. Nilai Parameter

Notasi	Nilai	Satuan	Referensi
K	0,3428669	individual	estimated
r	0,9	year ⁻¹	estimated
β	0.01908805373	(individual.year) ⁻¹	estimated
p_1	0.005489495101	(individual.year) ⁻¹	estimated

Notasi	Nilai	Satuan	Referensi
p_2	0.005651909358	(individual.year) ⁻¹	estimated
q_1	0.004391596081	year ⁻¹	estimated
q_2	0.004521527486	year ⁻¹	estimated
c_1	0.6	year ⁻¹	estimated
$c_2 + d_2$	0.06581861120	year-1	estimated
d_1	0.001450045	year-1	estimated
d_3	0.01514207437	year-1	estimated
d_4	0.01559026026	year-1	estimated
d_3	0.01514207437	year-1	estimated

Dari hasil evaluasi dengan nilai parameter pada Tabel 2, diperoleh simulasi numerik untuk model kontrol dengan metode algoritma Runge-Kutta Orde-4, dimana untuk menyelesaikan system-state digunakan algoritma forward Runge-Kutta, sedangkan untuk menyelesaikan co-state digunakan backward Runge-Kutta. Adapun periode dalam model yaitu 5 tahun.

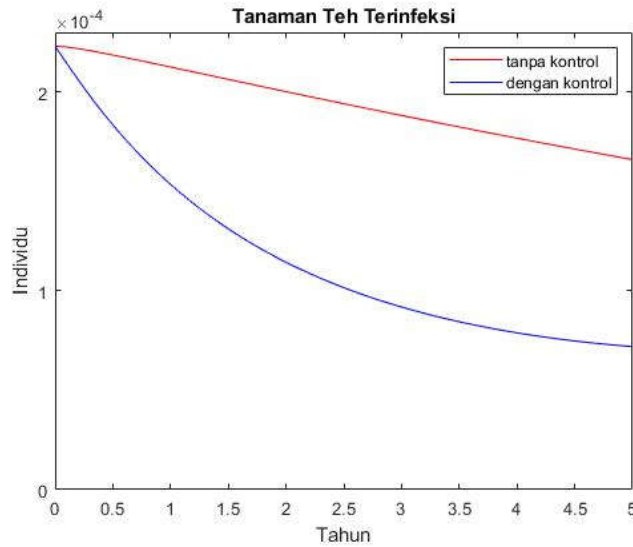
Grafik Teh Sehat dengan dan tanpa Kontrol



Gambar 2. Grafik Tanaman Teh Sehat. (a) Tanaman Teh Sehat Tanpa Kontrol. (b) Tanaman Teh Sehat Dengan Kontrol.

Simulasi model pada Gambar 7.1 menunjukkan perbandingan subpopulasi tanaman teh sehat sebelum dan sesudah diberikan control. Dari grafik di atas, dapat dilihat bahwa terdapat kenaikan subpopulasi tanaman teh setelah pemberian kontrol fungisida (u_1) pada penyakit dan kontrol pestisida (u_2) pada hama *Empoasca* dan ulat penggulung daun. Dari grafik diatas, dapat ditunjukkan bahwa populasi tanaman teh meningkat dari 1452000 individu menjadi 1453000 individu, simulasi pada Gambar 7.1 besarnya populasi tanaman teh sehat dikalikan dengan skala $1: 10^7$ dari besarnya populasi sebenarnya.

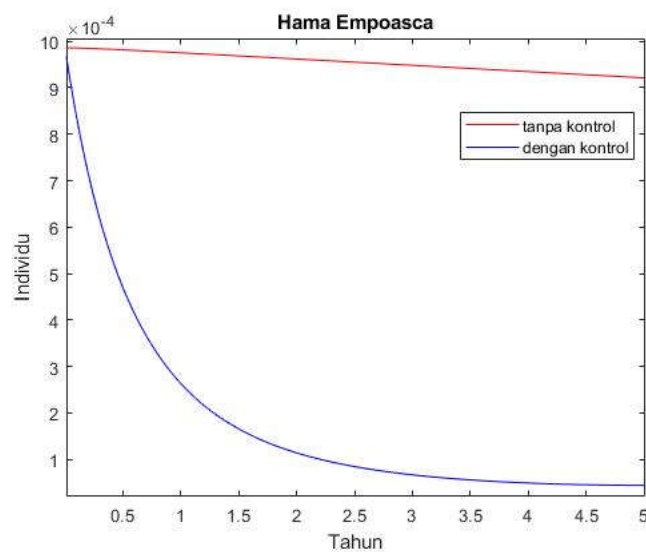
Grafik Teh Terinfeksi Dengan dan Tanpa Kontrol



Gambar 3. Grafik Teh Terinfeksi Dengan dan Tanpa Kontrol

Simulasi pada Gambar 7.2 menunjukkan efek setelah pemberian kontrol fungisida (u_1) pada tanaman teh terinfeksi penyakit. Setelah pemberian kontrol, dapat dilihat bahwa grafik teh terinfeksi menurun, sehingga penyakit *Blister Blight* dapat berkurang. Dari grafik di atas, dapat ditunjukkan bahwa populasi teh terinfeksi menurun dari 166 individu menjadi 72 individu, simulasi pada Gambar 7.2 besarnya populasi tanaman teh sehat dikalikan dengan skala $1: 10^6$ dari besarnya populasi sebenarnya.

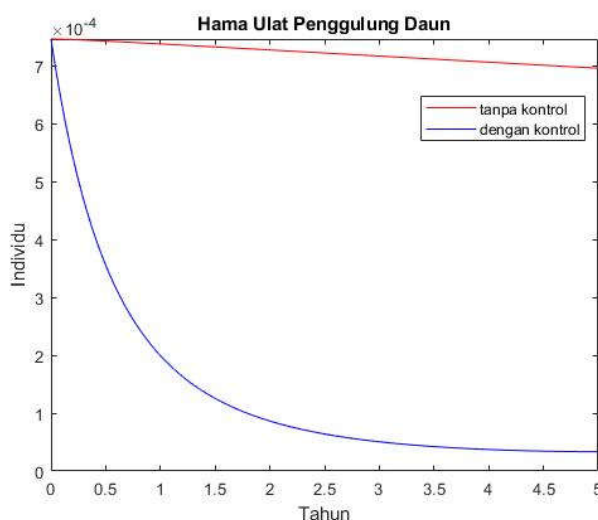
Grafik Hama *Empoasca* Dengan dan Tanpa Kontrol



Gambar 4. Grafik Hama *Empoasca* Ketika Diberikan Kontrol Dan Tanpa Kontrol

Simulasi model pada Gambar 7.3 menunjukkan efek pemberian kontrol pestisida (u_2) pada hama *Empoasca*. Dapat ditunjukkan setelah pemberian kontrol, grafik hama *Empoasca* menurun bila dibandingkan dengan sebelum pemberian kontrol, sehingga dapat mengurangi serangan hama *Empoasca*. Dari grafik diatas, dapat ditunjukkan populasi hama *Empoasca* berkurang dari 921 individu menjadi 44 individu, simulasi pada Gambar 7.2 besarnya populasi tanaman teh sehat dikalikan dengan skala $1: 10^6$ dari besarnya populasi sebenarnya.

Leaf Roller Caterpillar Pest Graph with and without Control



Gambar 5. Grafik Hama Ulat Penggulung Daun Ketika Diberikan Kontrol dan Tanpa Kontrol

Simulasi model pada Gambar 7.4 menunjukkan efek setelah pemberian kontrol pestisida (u_2) pada hama ulat penggulung daun. Dapat ditunjukkan setelah pemberian kontrol, hama ulat penggulung daun mengalami penurunan dari 695 individu menjadi 33 individu, simulasi pada Gambar 7.2 besarnya populasi tanaman teh sehat dikalikan dengan skala $1: 10^6$ dari besarnya populasi sebenarnya.

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dapat diperoleh pengembangan model dinamik interaksi antara tanaman teh, hama, dan penyakit dengan menambahkan dua kontrol. Model pada penelitian ini dikembangkan dengan menggabungkan model pertumbuhan logistik, model epidemi SI (*Susceptible-Infected*), dan model predator-prey dengan menambahkan kontrol fungisida dan insektisida. Dari pengembangan model pada penelitian ini diperoleh 5 titik kesetimbangan. Adapun titik kesetimbangan endemik dan non-endemik kemudian dianalisis kestabilannya baik secara lokal maupun global. Berdasarkan analisis model dan simulasi dengan data yang diperoleh, maka titik kesetimbangan 5 (titik non-endemik) stabil asimtotik lokal dengan $\mathfrak{R}_0 > 0,99$ yang menunjukkan bahwa dalam kurun waktu 5 tahun belum terjadi penyebaran penyakit pada ekosistem perkebunan teh di PT RSM. Selanjutnya untuk model kontrol, dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin diperoleh solusi kontrol optimal

yang dapat memberikan gambaran pengendalian hama dan penyakit dengan memilih fungisida dan insektisida sebagai strategi pengendalian yang optimal. Dari hasil solusi numerik diperoleh perbandingan masing-masing kompartemen saat diberikan kontrol dan ketika tidak diberikan kontrol. Pemberian fungisida dapat mengurangi populasi tanaman teh yang terinfeksi, sedangkan pemberian insektisida dapat mengurangi hama *Empoasca* dan hama ulat penggulung daun. Setelah pemberian kontrol, populasi tanaman teh yang tertular penyakit menurun 93,21%, populasi hama *Empoasca* menurun 99,47%, dan hama ulat penggulung daun menurun 99,31% jika dibandingkan dengan model yang tidak diberikan kontrol. Sehingga pemberian pengendalian yang optimal dapat mengurangi serangan hama dan penyakit pada ekosistem perkebunan teh serta dapat meningkatkan populasi tanaman teh yang sehat.

5. DAFTAR PUSTAKA

- Aldila, D., Ndi, M. Z., and Samiadji, B. M. (2020): Optimal control on Covid-19 eradication program in Indonesia under the effect of community awareness, *Mathematical Biosciences and Engineering*, Research Article MBE, 17(6): 6355-6389.
- Bai, D., Zhang, X. (2022): Dynamics of a Predator–Prey Model with the Additive Predation in Prey. *Mathematics*, 10, 655.
- Becker, O. and Wildburger, U. L. (2020): Optimal dynamic control of predator-prey models, *Central European Journal of Operations Research*, 28, 425- 440.
- Bessonov, N., Bocharov, G., Touaoula, T.M., Trofimchuk, S., Volpert, V. (2019): Delay reaction– diffusion equation for infection dynamics. *Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B* 24(5), 2073–2091.
- Bezabih, A. F., Edessa, G. K., and Rao, K. P. (2021): Ecoepidemiological model and analysis of prey-predator system, *Journal of Applied Mathematics*, Article ID 6679686, 17 pages.
- Castillo-Chavez, C., & Song, B. (2004): Dynamical models of tuberculosis and their applications, *Mathematical Biosciences and Engineering*, MBE, 1(2), 361–404.
- Chasnov, J. R. (2016): *Mathematical biology*, Lecture notes for MATH 4333, 1-14.
- Das, N., and Bhattacharya, R. (2020): Eigen value analysis in lower bounding uncertainty of kalman filter estimated, *Conference Paper Archive, IFAC PaperOnline* 53-2 5022-5027.
- Djilali, S and Ghanbar, B. (2021): Dynamical behavior of two predators–one prey model with generalized functional response and time-fractional derivative. *Advances in Difference Equations* *Advances in Difference Equations* (2021) 2021:235.
- Eskenduri, R.D. (2020): Budidaya jaringan tanaman teh di Indonesia, *Bioma : Jurnal Biologi Makassar*, Vol. 5(2) : 121-130. ISSN : 2528-7168 (printed) ; 2548-6659 (online).
- Hao, P., Wei, J. and Fan, D. (2012): Analysis of dynamic in an eco-epidemiological model with stage structure, *Advances in Difference Equations*.
- Kant, S. and Kumar, V. (2017): Stability Analysis of Predator-Prey System With Migrating Prey and Disease Infection in Both Species, *Applied Mathematical Modelling*, 42, 509-539
- Kuniya, T., Touaoula, T.M. (2020): Global stability for a class of functional differential equations with distributed delay and non-monotone bistable nonlinearity. *Math. Biosci. Eng.* 17(6), 7332–7352.

- Li, J., (2016). An algebraic approach to proving the global stability of a class of epidemic models. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 13(5).
- Mansur, Ansar, A., dan Fardinah. (2020): Analisis model predator prey dengan adanya penyakit pada prey dan pemanenan pada predator, *Journal of Mathematics: Theory and Applications*, Vol. 2, No. 2, P-ISSN 2685-9653 e ISSN 2722-2705.
- Meng, X.; Li, J. (2020): Dynamical Behavior of a Delayed Prey-Predator-Scavenger System with Fear Effect and Linear Harvesting. *Int. J. Biomath*, 14, 2150024.
- Naji R. K. and Hussien, R. M. (2016): The Dynamics of Epidemic Model with Two Types of Infectious Diseases and Vertical Transmission, *Journal of Applied Mathematics*, 2016.
- Naji, R. K., and Majeed, S. J. (2020): The Dynamical Analysis of a Delayed prey-Predator Model with a Refuge-Stage Structure Prey Population. *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics* Vol. 15, No. 1, pp 135-159.
- Pal, A.K., Bhattacharyya, A., and Mondal, A. (2022). Qualitative analysis and control of predator switching on an eco-epidemiological model with prey refuge and harvesting. *Science Direct. Results In Control and Optimization* 7 100099.
- Selvam, A. G. M., Janagaraj, R and Jacintha, M. (2020): Dynamical analysis of a discrete fractional order prey-predator system incorporating a prey refuge with Holling type II response. *Journal of Physics: Conference Series* 1597 (2020) 012008.
- Shabbir, M. S., Din, Q., Muhammad Safeer, M., Khan, M. A., and Ahmad, K. A. (2019): A Dynamically Consistent Nonstandart Finite Difference Scheme for A Predator-Prey Model. *Advance in Difference Equations*. 381.
- Strzelecka, A., Kujawska, K. A., and Zawadzka, D. (2020): Application of logistic regression models to assess household financial decisions regarding debt, 24th International Conference on Knowledge-Based and Intelligent Information & Engineering System, *Procedia Computer Science* 176, 3418-3427.
- Syamsir. (2020): Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Matematika Dinamik Perceraian, Tesis Program Studi Magister, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Makassar.